

**AVALIAÇÃO DE OPÇÕES DE COMPRA NO MERCADO BRASILEIRO
SEGUNDO ABORDAGEM ALTERNATIVA AO MODELO DE BLACK &
SCHOLES: O MODELO SENO HIPERBÓLICO**

Carlos Heitor d'Ávila Pereira Campani

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Instituto COPPEAD de Administração

Dissertação de Mestrado

Orientador: Prof. Eduardo Facó Lemgruber

Rio de Janeiro

Junho de 2004

**AVALIAÇÃO DE OPÇÕES DE COMPRA NO MERCADO BRASILEIRO
SEGUNDO ABORDAGEM ALTERNATIVA AO MODELO DE BLACK &
SCHOLES: O MODELO SENO HIPERBÓLICO**

Carlos Heitor d'Ávila Pereira Campani

**Dissertação submetida ao corpo docente do Instituto COPPEAD de
Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos
requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.**

Aprovada por:

Prof. Eduardo Facó Lemgruber - Orientador

Ph. D. – COPPEAD/UFRJ

Prof. Celso Funcia Lemme

Ph. D. – COPPEAD/UFRJ

Prof. Antonio Carlos Figueiredo Pinto

Ph. D. – I.A.G./PUC

Rio de Janeiro

Junho de 2004

FICHA CATALOGRÁFICA

Campani, Carlos Heitor d'Ávila Pereira.

Avaliação de Opções de Compra no Mercado Brasileiro Segundo Abordagem Alternativa ao Modelo de Black & Scholes: o Modelo Seno Hiperbólico / Carlos Heitor d'Ávila Pereira Campani. – Rio de Janeiro, 2004.

xiii, 63 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Administração) – Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Instituto COPPEAD de Administração, 2004.

Orientador: Eduardo Facó Lemgruber

1. Finanças. 2. Mercado Financeiro. 3. Derivativos
- Teses. I. Lemgruber, Eduardo Facó (Orient.). II.
Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto COPPEAD
de Administração. III. Título.

AGRADECIMENTOS

A Deus, porque tudo acontece de acordo com Sua vontade;

a minha família, que sempre me apoiou;

ao professor-orientador, Prof. Eduardo Facó Lemgruber, pela sua dedicação;

aos membros da banca, Prof. Antonio Carlos Figueiredo Pinto e Prof. Celso Funcia

Lemme, pelo tempo e atenção dedicados.

RESUMO

CAMPANI, Carlos Heitor d'Ávila Pereira. **Avaliação De Opções De Compra No Mercado Brasileiro Segundo Abordagens Alternativas Ao Modelo De Black & Scholes.** Orientador: Prof. Eduardo Facó Lemgruber. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPEAD, 2004. Dissertação (Mestrado em Ciência da Administração).

Esta dissertação investiga o Modelo Seno Hiperbólico para precificação de opções de compra do tipo europeu, analisando os resultados comparativamente aos fornecidos pelo Modelo de Black e Scholes, este último amplamente conhecido e utilizado no mercado brasileiro. A idéia central inicial desta pesquisa consistia na investigação de algum outro modelo de precificação de opções com aderência ao mercado possivelmente superiora à fórmula de Black e Scholes, já que este constitui uma espécie de *benchmark* no mercado financeiro mundial. Escolheu-se o Modelo Seno Hiperbólico pela sua relativa simplicidade no que diz respeito à fórmula fechada final de precificação e pela facilidade de manuseio das variáveis de entrada desta equação, características comuns também ao Modelo de Black e Scholes. A estimativa dos dois parâmetros do modelo, que aparentemente não representam variáveis econômicas ou de mercado, foi um desafio à parte ao longo desta pesquisa. Os resultados foram inconclusivos para o Modelo de Black e Scholes, no entanto bastante satisfatórios para o Modelo Seno Hiperbólico, sob a restrição do preço de mercado da opção ser superior a R\$ 1,00.

ABSTRACT

CAMPANI, Carlos Heitor d'Ávila Pereira. **Avaliação De Opções De Compra No Mercado Brasileiro Segundo Abordagens Alternativas Ao Modelo De Black & Scholes.** Orientador: Prof. Eduardo Facó Lemgruber. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPEAD, 2004. Dissertação (Mestrado em Ciência da Administração).

This dissertation investigates the Sine Hyperbolic Model, which evaluates European call option prices, analyzing the results comparatively to the Black and Scholes Model, widely known and used in the Brazilian financial market. The initial central idea of this research was the inquiry of a call option valuation model other than Black and Scholes, which constitutes a benchmark in the world-wide financial market. The Sine Hyperbolic Model was chosen for its simplicity with respect to its final closed formula, a feature also found in the Black and Scholes Model. The estimate of the two parameters of the Sine Hyperbolic Model, that apparently do not represent economic or market variables, was a particular challenge all over this research. Our tests had not been satisfactory for the Black and Scholes Model, but sufficiently satisfactory for the Hyperbolic Sine Model under the restriction of option market prices superior to R\$ 1,00.

LISTA DE GRÁFICOS

- GRÁFICO 4.1** – Erros relativos do Modelo Seno Hiperbólico em relação ao Preço de Fechamento da Opção de Compra sobre o ativo TNLP4 em Função do Preço de Fechamento. O Período de Análise Compreende 15/09/2000 a 20/03/2003 e a Amostra Está Excluída dos Erros Superiores em Módulo a 100%. Total de 3.938 Observações.....49
- GRÁFICO 4.2** – Erros relativos do Modelo de Black e Scholes em relação ao Preço de Fechamento da Opção de Compra sobre o ativo TNLP4 em Função do Preço de Fechamento. O Período de Análise Compreende 15/09/2000 a 20/03/2003 e a Amostra Está Excluída dos Erros Superiores em Módulo a 100%. Total de 3.938 Observações.....50
- GRÁFICO 4.3** – Evolução do Preço de Mercado e dos Preços dados pelos Modelos Seno Hiperbólico e Black e Scholes da Opção de compra TNLPB34, sobre o Ativo TNLP4, com vencimento em 18 de Fevereiro de 2002.....53
- GRÁFICO 4.4** – Evolução do Preço de Mercado e dos Preços dados pelos Modelos Seno Hiperbólico e Black e Scholes da Opção de compra TNLPJ20, sobre o Ativo TNLP4, com vencimento em 21 de Outubro de 2002.....55

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 – Eventos Sobre o Ativo TNLP4 Durante o Período de 4 de Janeiro de 1999 a 6 de Maio de 2003. Os Valores Monetários Estão Expressos em Reais.....	26
TABELA 4.1 – Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 15/09/2000 até 20/03/2003. Total de 4851 Observações.....	39
TABELA 4.2 – Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 15/09/2000 até 20/03/2003. Total de 3938 Observações.....	41
TABELA 4.3 – Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 com Vencimento em 18/12/2000 (Série 3) Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si. Total de 194 Observações.....	43
TABELA 4.4 – Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 com Vencimento em 18/06/2001 (Série 6) Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si. Total de 145 Observações.....	44

TABELA 4.5 – Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 com Vencimento em 21/10/2002 (Série 14) Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si. Total de 314 Observações.....45

TABELA 4.6 – Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 com Vencimento em 17/02/2003 (Série 18) Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si. Total de 137 Observações.....46

TABELA 4.7 – Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 15/09/2000 até 20/03/2003. Foram Excluídas as Observações com Preços de Fechamento abaixo de R\$ 1,00. Total de 2.239 Observações.....51

TABELA 4.8 – Aderência dos Preços da Opção de Compra TNLPF34 sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 16/04/2001 até 13/06/2001. Total de 30 Observações52

TABELA 4.9 – Aderência dos Preços da Opção de Compra TNLPJ20 sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 14/08/2001 até 17/10/2001. Total de 31 Observações54

LISTA DE ANEXOS

ANEXO 1: Definição da Função \emptyset (a, b, y), Referente ao Modelo Gama de Variância.....	65
ANEXO 2: Lista de Feriados no Brasil Durante o Período de 4 de Janeiro de 1999 a 6 de Maio de 2003.....	66
ANEXO 3: Séries de Opções Utilizadas por Esta Pesquisa, de Acordo com o Respetivo Vencimento	67
ANEXO 4: Regressão Linear entre os Preços dados pelo Modelo Seno Hiperbólico e o Preço de Fechamento da Opção no Mercado e Regressão Linear entre os Preços dados pelo Modelo de Black e Scholes e o Preço de Fechamento da Opção no Mercado	68
ANEXO 5: Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo Seno Hiperbólico e o Número de Negociações da Opção no Dia e Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo de Black e Scholes e o Número de Negociações da Opção no Dia.....	69
ANEXO 6: Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo Seno Hiperbólico e o Número de Dias Úteis da Opção para o Vencimento e Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo de Black e Scholes e o Número de Dias Úteis da Opção para o Vencimento	70

ANEXO 7: Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo Seno Hiperbólico e a variável Moneyness (S/K) da Opção e Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo de Black e Scholes e a variável Moneyness (S/K) da Opção.....	71
ANEXO 8: Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo Seno Hiperbólico e o Preço de Fechamento da Opção e Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo de Black e Scholes e o Preço de Fechamento da Opção.....	72
ANEXO 9: Preços da Opção de Compra TNLPPF34 sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes, além do Preço de Fechamento no Mercado.....	73

SUMÁRIO

<u>1. INTRODUÇÃO</u>	1
<u>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u>	5
<u>2.1 – O Modelo Gama de Variância</u>	5
<u>2.2 – O Modelo Seno Hiperbólico</u>	9
<u>2.2.1 – A Equação Diferencial Parcial Não-Linear para a Volatilidade</u>	10
<u>2.2.2 – A Precificação de Opções</u>	11
<u>2.3 – A Transformada Rápida de Fourier</u>	14
<u>2.4 – O Modelo Log-Estável de Momento Finito</u>	17
<u>2.5 – O Modelo CGMY</u>	20
<u>3. METODOLOGIA</u>	24
<u>3.1 – Amostra de Dados</u>	24
<u>3.2 – Organização dos Dados</u>	26
<u>3.3 – Estimativa pelo Método de Black e Scholes</u>	28
<u>3.3.1 – Estimativa da Taxa Livre de Risco</u>	28
<u>3.3.2 – Estimativa da Volatilidade do Ativo-Objeto</u>	29
<u>3.4 – Estimativa pelo Método Seno Hiperbólico</u>	33
<u>3.4.1 – Estimativa dos Parâmetros Livres a e L</u>	35

<u>4. RESULTADOS</u>	38
<u>4.1 – Análise Geral da Amostra de Dados</u>	38
<u>4.2 – Análise por Série de Opções</u>	42
<u>4.3 – Análise por Opção</u>	47
<u>5. CONCLUSÃO</u>	56
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	60
<u>ANEXOS</u>	63

1. INTRODUÇÃO

O início da década de 70 foi definitivamente importante para a teoria de apreçamento de opções¹. Além de Merton (1973), Black e Scholes (1973), num dos clássicos artigos publicados em finanças, apresentam um modelo de análise de opções culminando em uma fórmula de apreçamento até então impensada e surpreendentemente simples. Entretanto, para ser obtida a fórmula, Black e Scholes assumem hipóteses ideais dentro do mercado de ações e de opções. Dentre outras, o modelo assume total e irrestrita possibilidade de vendas a descoberto; ausência de custos de transação; taxa de juros livre de risco em curto prazo constante, conhecida e acessível; a opção é do tipo europeu; o ativo do qual a opção deriva descreve um movimento geométrico Browniano ao longo do tempo, o que implica em uma distribuição log-normal para o preço da ação; por fim, o modelo ainda pressupõe que a volatilidade do ativo seja constante e que não haja pagamento de dividendos durante a vida da opção.

Tais hipóteses restringem a validade da fórmula de Black e Scholes. Whaley (1982), por exemplo, cita que menos de 5% das opções listadas na CBOE² eram sobre ações que não pagavam dividendos. Além disso, Rubinstein (1994) documenta a pronunciada dependência da volatilidade implícita com o preço de exercício da opção, o que faz da volatilidade uma variável do processo (contradizendo uma das hipóteses mais marcantes do modelo de Black e Scholes). Por outro lado, Merton (1976) já havia declarado que a equação de Black e Scholes não é válida quando a dinâmica do preço da ação não pode ser representada por um processo estocástico com caminho amostral contínuo.

Entretanto, como afirmam Mantegna e Stanley (2000), este é o caminho da ciência: utiliza-se um modelo ideal para se entender aspectos básicos do problema real. O modelo idealizado não é capaz de explicar todas as ocorrências observadas no mundo real, porém a idéia é que ele seja capaz de descrever aquelas que sejam essenciais. Assim que a validade do modelo é atestada, extensões e generalizações aparecem a fim de explicarem situações anteriormente não explicadas pelo modelo original.

¹ Para perguntas gerais e conceitos importantes, consulte Carr (1998 e 2002).

² Chicago Board Options Exchange.

Foi exatamente isto o que aconteceu com o modelo de Black e Scholes. Algumas pesquisas relaxaram hipóteses, outras partiram de processos estocásticos alternativos. Por exemplo, Lewis (2000) considera uma volatilidade estocástica, bem como Carr, Geman, Madan e Yor (2003).

O modelo de Black e Scholes está centrado no movimento geométrico Browniano, cuja descrição é dada pela equação abaixo:

$$dS/S = \mu dt + \sigma dz,$$

onde S é o valor do ativo, μ é a taxa de desvio (*drift*) e z , um processo de Wiener.

O objetivo deste trabalho é investigar alguns estudos realizados após Black e Scholes até os dias atuais envolvendo processos estocásticos diversos sempre com a intenção final de precificar opções européias com um modelo que explique desvios apresentados pela equação original de Black e Scholes. Dentre os diversos modelos que serão apresentados, adotaremos um deles, com o qual:

- I. Apreçaremos opções da empresa Telemar S.A.;
- II. Avaliaremos a magnitude do desvio cometido, quando comparado com o preço de mercado da opção;
- III. Compararemos com a precificação dada pela fórmula de Black e Scholes;
- IV. Avaliaremos estatisticamente se o modelo apresenta resultados efetivamente distintos do modelo de Black e Scholes.

A importância deste trabalho reside na sua atualidade e na escassez de literatura nacional sobre o assunto, além da inovação em se trabalhar com um modelo diferente de Black e Scholes. Além disso, serve também para avaliar como um modelo diferente de Black e Scholes se adaptaria a um mercado emergente como o brasileiro, com características peculiares e um tanto quanto diferentes das características dos mercados onde em geral essas pesquisas são realizadas.

As demais seções deste trabalho estão assim organizadas: no capítulo 2 procedemos a uma revisão bibliográfica de modelos ou processos estocásticos que levem a meios de precificação de opções

européias, sejam eles sob a forma de fórmula fechada para uma *call* do tipo europeu ou através do método da Transformada Rápida de Fourier, desenvolvido por Madan e Carr (1998). Convém ressaltar que não está no escopo desta dissertação esgotar as fórmulas de precificação até hoje encontradas, muito menos entrarmos a fundo nos aspectos matemáticos de cada processo, mas sim apenas revisar alguns dos processos estocásticos que mais aparecem em trabalhos internacionais na área de finanças nos dias atuais. No capítulo 3, são apresentados os dados e a metodologia empregada por este trabalho, explicando a estimativa dos parâmetros. Os resultados obtidos, bem como a forma de comparação entre os modelos encontram-se no capítulo 4. Finalmente, as conclusões e sugestões para investigações futuras estão no capítulo 5.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta dissertação revisa ao longo deste capítulo quatro modelos alternativos ao de Black e Scholes. Conforme mencionado por Carr (*survey*, 2000), o modelo Gama de Variância substitui o movimento geométrico browniano por um modelo aritmético browniano subordinado a um processo gama não viesado. O modelo CGMY generaliza este modelo, adicionando um quarto parâmetro com o intuito de controlar a estrutura fina do caminho aleatório desenhado pelo preço do ativo. Já o modelo Log-Estável de Momento Finito tenta capturar o comportamento descrito pela volatilidade implícita do ativo, com um processo que permite retornos com variância, curtose e assimetria ilimitadas, mantendo, no entanto, expectativas finitas para o preço e para o preço ao quadrado deste ativo. Por fim, o Modelo Seno Hiperbólico, ao invés de trabalhar com *payoffs* exponenciais para a ação, supõe mais genericamente que tal *payoff* seja melhor representado pela diferença de duas funções exponenciais.

2.1 – O Modelo Gama de Variância.

Enquanto que no modelo de Black e Scholes o caminho aleatório descrito pelo ativo no tempo é contínuo, Cox e Ross (1976) trabalharam com um modelo puro de saltos, portanto descontínuo no tempo. Merton (1976), por sua vez, também fez o mesmo ao utilizar um modelo de difusão com saltos. Um exemplo importante de modelo puro de saltos é o modelo gama de variância, estudado por Madan e Seneta (1990) e Madan, Carr e Chang (1998).

O processo gama de variância, denominado daqui por diante de processo VG, é obtido avaliando-se um movimento browniano (com desvio e volatilidade constantes) sob mudança de tempo aleatória dada por um processo gama. Cada unidade de tempo deve ser compreendida como tendo um comprimento de tempo economicamente relevante dado por uma variável aleatória independente que possui uma densidade gama com média unitária e variância positiva. De acordo com o processo VG, o retorno contínuo de um período unitário é normalmente distribuído, condicionado à realização de um tempo aleatório. Tal tempo aleatório é que possui uma densidade gama. O resultado é um processo estocástico aliado a um

modelo de precificação de opções robusto com apenas três parâmetros. Além da volatilidade do movimento browniano, existem parâmetros que controlam:

- i. a curtose, ou seja, o incremento nas caudas tanto da direita quanto da esquerda da distribuição de probabilidade do retorno;
- ii. a assimetria na densidade de probabilidade do retorno.

O processo gama de variância (VG) possui como função característica³ a expressão que segue:

$$\varphi_{VG}(u, t) = E\{ \exp[iuX_{VG}(t)] \} = (1 - i \theta v u + 0,5 * \sigma^2 v u^2)^{-t/v},$$

onde σ , θ e v são os parâmetros do processo.

Uma outra representação consiste em fatorar a expressão acima e interpretar o processo gama de variância como a diferença de dois processos gama, já que:

$$(1 - i \theta v u + 0,5 * \sigma^2 v u^2) = (1 - i \eta_p u) * (1 + i \eta_n u),$$

onde η_p e η_n satisfazem $\eta_p - \eta_n = \theta v$ e $\eta_p * \eta_n = 0,5 * \sigma^2 v$. Resolvendo-se o sistema, encontram-se os valores:

$$\eta_p = (\theta^2 * v^2 / 4 + \sigma^2 v / 2)^{0,5} + \theta v / 2,$$

$$\eta_n = (\theta^2 * v^2 / 4 + \sigma^2 v / 2)^{0,5} - \theta v / 2.$$

Os dois processos gama podem ser denotados por $G_p(t; \mu_p, v_p)$ e $G_n(t; \mu_n, v_n)$ com respectivas médias e taxas de variância μ_p, μ_n e v_p, v_n . Para tais processos, temos $\mu_p = \eta_p / v$ e $\mu_n = \eta_n / v$, enquanto que $v_p = \mu_p^2 * v$ e $v_n = \mu_n^2 * v$. Assim, nós temos que:

$$X_{VG}(t; \sigma, v, \theta) = G_p(t; \mu_p, v_p) - G_n(t; \mu_n, v_n).$$

³ Por função característica, entende-se qualquer função que tenha a forma abaixo:

$$C(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) * dG(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) * g(x) dx$$

O processo G_p responde pelos acréscimos no preço do ativo, ao passo que G_n responde pelos decaimentos de preço.

Para esta representação do processo VG e representações clássicas para medidas de Lévy de processos gama, Madan et al. (1998) mostram que a densidade de Lévy para o processo VG é dada pela expressão:

$$K_{VG}(x) = \mu_b^2 / \nu_p * \exp(-\mu_b / \nu_b * |x|) / |x|,$$

onde $b = n$ para $x < 0$ e $b = p$, para $x > 0$.

Com todas as especificações dadas acima, a dinâmica do preço do ativo é obtida substituindo-se o movimento geométrico browniano da equação clássica de Black e Scholes pelo processo VG. Teríamos com isso:

$$S(t) = S_0 * \exp(rt + X(t; \sigma, \nu, \theta) + w * t),$$

onde r representa a taxa de juros continuamente composta e $w = (1/\nu) * \ln(1 - \theta * \nu - \sigma^2 \nu / 2)$, além de S_0 denotar $S(0)$, ou seja, o preço da ação no instante inicial.

O preço de uma opção europeia de compra, $C(S_0, K, t)$, para um preço de exercício K e maturidade t , é dado por⁴:

$$C(S_0, K, t) = e^{-rt} * \text{Esp} [\text{Max}(S(t) - K, 0)].$$

Madan et al. (1998) resolveram a equação acima e encontraram uma expressão fechada para a opção europeia de compra⁵:

$$C(S_0, K, t) = S_0 * \Psi(d * \text{raiz}((1-c_1)/\nu); (\alpha + s) * \text{raiz}(\nu/(1-c_1)); t/\nu) -$$

onde $G(x)$ é uma função de distribuição de probabilidade acumulada e $g(x) = dG/dx$, sua densidade de probabilidade. Para maiores detalhes, consulte Lukacs (1960).

⁴ A função $\text{Esp}(x)$ denota o valor esperado do argumento x , este último podendo ser muitas vezes uma própria função.

⁵ $\text{Raiz}(x) = x^{1/2}$.

$$K * \exp(-r * t) * \Psi(d * \text{raiz}((1 - c_2) / v); (\alpha * S) * \text{raiz}(v / (1 - c_2)); t / v),$$

onde:

$$d = \text{raiz}(1 + \theta^2 * v / 2 * \sigma^2) / \sigma * [\ln(S_0 / K) + r * t + (t / v) * \ln((1 - c_1) / (1 - c_2))],$$

$$\alpha = (-\theta / \sigma) / \text{raiz}(1 + \theta^2 * v / 2 * \sigma^2),$$

$$c_1 = v * (\alpha + \sigma / \text{raiz}(1 + \theta^2 * v / 2 * \sigma^2))^2 / 2,$$

$$c_2 = v * \alpha^2 / 2,$$

e a função Ψ é definida em termos da função de Bessel modificada do segundo tipo e da função hipergeométrica degenerada de duas variáveis, conforme pode ser observado no anexo 1.

A fórmula acima de precificação de uma opção de compra europeia possui a forma usual do preço da ação multiplicado por um elemento de probabilidade menos o valor presente do preço de exercício multiplicado por um segundo elemento de probabilidade. Este segundo elemento de probabilidade nada mais é do que a probabilidade, no mundo neutro ao risco, de $S(t)$ exceder K , ou seja, da opção de compra resultar em exercício.

2.2 – O Modelo Seno Hiperbólico.

Uma das mais clássicas restrições do modelo de Black e Scholes é a hipótese de volatilidade constante, representada pelo desvio padrão dos retornos futuros possíveis.

Rubinstein (1994), apenas para citar um exemplo, documentou uma forte dependência da volatilidade implícita com o preço de exercício da opção. Enquanto a natureza de tal curva, denominada de *smile*, é objeto de muita discussão nos dias de hoje (vide Carr, Tari e Zariphopolou, 1999), muitos pesquisadores buscaram modelos de volatilidade variável que pudessem explicar o comportamento *smile* das opções.

Apesar das vantagens explicativas de uma volatilidade por exemplo dependente do preço do ativo, ainda existe um número limitado de especificações para as quais seja possível encontrar fórmulas fechadas para os preços das opções. Nesta seção, chegaremos a uma fórmula fechada para a precificação de *calls* européias (e conseqüentemente *puts* européias, através da equação de paridade), segundo o Modelo Seno Hiperbólico.

2.2.1 – A Equação Diferencial Parcial Não-Linear para a Volatilidade.

Neste modelo econômico, assume-se que não existe possibilidade de arbitragem, o mercado é sem atritos (ou seja, não há custos de transação, os negócios são instantâneos etc) e o preço do ativo principal segue um processo de difusão unidimensional partindo de um valor positivo. Assume-se também um *drift* (desvio) proporcional e neutro ao risco de $(r - q)$, com $r \geq 0$ representando a taxa livre de risco e $q \geq 0$, a taxa de dividendo, ambos constantes. A volatilidade é uma função positiva $a(S, t)$ do preço da ação $S \in (0, \infty)$ e do tempo $t \in (0, T)$, onde T é alguma data distante excedendo a maior maturidade dentre as opções a serem precificadas. Nestas condições, o processo neutro ao risco seguido pelo preço da ação é representado pela equação abaixo:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + a(S_t, t)dW_t$$

onde W_t é um movimento browniano padrão.

Sob todas estas condições, Carr, Tari e Zariphopoulou (1999) desenvolveram a condição necessária que a função de volatilidade $a(S, t)$ deve respeitar, representada pela equação:

$$\frac{a^2(S, t)}{2} * \frac{\partial^2 a(S, t)}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial a(S, t)}{\partial S} + \frac{\partial a(S, t)}{\partial t} = (r - q) * a(S, t), \quad S > 0 \quad e \quad t \in [0, T].$$

A partir de então, a cada modelo para a função de volatilidade $a(S, t)$, tem-se um modelo de precificação de derivativos. Carr, Tari e Zariphopoulou (1999) desenvolveram três especificações para a

função de volatilidade com fórmulas fechadas de precificação de opções: seno hiperbólico, cúbico suprimido e uma combinação dos dois. Na próxima seção, expomos os detalhes do Modelo Seno Hiperbólico.

2.2.2 – A Precificação de Opções.

Consideraremos, dentre as funções que satisfazem a equação da seção anterior, o Modelo Seno Hiperbólico, segundo o qual o processo neutro ao risco seguido pelo preço da ação é:

$$S_t = \beta * \exp[-\mu(T-t)] * \sinh[\alpha(W_t - L)], \quad W_t > L \quad e \quad t \in [0, T],$$

onde β é definido pela expressão $\beta = S_0 * \exp(\mu T) * \operatorname{csch}(-\alpha L)$, μ é determinado por $\mu = r - q - \alpha^2/2$, sendo L e α os parâmetros livres do processo⁶. A restrição $W_t > L$ se justifica pelo fato de a função seno hiperbólico ser sempre negativa para argumentos negativos. Assim, se tal condição não fosse satisfeita, a equação acima poderia resultar em preços de ação negativos! Nesta mesma linha de raciocínio, o parâmetro α deve ser positivo ao passo que L deve ter sinal negativo.

Nessas condições, a função de volatilidade é modelada pela expressão abaixo:

$$a(S, t) = \alpha * \operatorname{raiz}(S^2 + \beta^2 * \exp[-2\mu(T-t)]).$$

Com um pouco de algebrismo, pode-se facilmente demonstrar que a função de volatilidade $a(S, t)$ acima satisfaz à condição dada pela equação da seção anterior.

Dividindo a expressão acima pelo preço da ação, obtemos a volatilidade relativa instantânea:

$$\begin{aligned} \sigma(S, t) &= a(S, t)/S = \alpha * \operatorname{raiz}(1 + (\beta / S * \exp[\mu(T-t)])^2) = \\ &= \alpha * \operatorname{raiz}[1 + (S_0 * \exp(\mu T) * \operatorname{csch}(-\alpha L) / S)^2]. \end{aligned}$$

Por exemplo, para uma opção *at the money*, ou seja, com $S = S_0 * \exp(\mu T)$, teremos:

⁶ Lembrando que $\sinh(x) = [\exp(x) - \exp(-x)]/2$, e $\operatorname{csch}(x) = \sinh^{-1}(x) = 1 / \sinh(x)$.

$$\sigma(S, t) = \alpha * \text{raiz}[1 + \text{csch}^2(-\alpha L)].$$

Assim, quanto maior o parâmetro L , maior será a volatilidade *at the money*.

Para enfim se chegar à fórmula de precificação da opção de compra do tipo europeu, Carr, Tari e Zariphopoulou (1999) desenvolvem a expressão abaixo dentro do Modelo Seno Hiperbólico:

$$C(S_0, K, t) = e^{-rt} * \text{Esp} [\text{Max} (S(t) - K, 0)],$$

obtendo a seguinte fórmula de precificação:

$$\begin{aligned} C(S, t) = & \frac{1}{2} * \exp(-q(M-t)) * (S + \text{raiz}[S^2 + \beta^2 \exp(-2\mu(T-t))]) * \\ & [N(d_+ + \alpha * \text{raiz}(M-t)) + N(d_- - \alpha * \text{raiz}(M-t))] \\ & - \frac{1}{2} * \beta^2 * \exp[-q(M-t) - 2\mu(T-t)] * (S + \text{raiz}[S^2 + \beta^2 \exp(-2\mu(T-t))])^{-1} * \\ & [N(d_+ - \alpha * \text{raiz}(M-t)) + N(d_- + \alpha * \text{raiz}(M-t))] \\ & - K \exp(-r(M-t)) * [N(d_+) - N(d_-)], \end{aligned}$$

onde:

$$d_{\pm} = \frac{\{\pm \text{arcsenh}[S \exp(\mu(T-t))/\beta] - \text{arcsenh}[K \exp(\mu(T-t))/\beta]\} / \alpha * \text{raiz}(M-t),$$

M é o tempo de maturidade da opção a contar da data zero e $N(x)$ diz respeito à função de probabilidade acumulada da distribuição normal⁷.

Pode-se notar na fórmula acima, como anteriormente comentado, que há apenas dois parâmetros livres do modelo a serem empiricamente estimados: α e L . As outras entradas são facilmente observáveis: r , q , t , S_0 , S , K e M . As constantes μ e β são determinadas por expressões anteriormente citadas e, por fim, a escolha de T , que em princípio pode ser qualquer data posterior à M , não influencia o preço da *call*, visto que tal valor é cancelado algebricamente na fórmula acima.

⁷ $\text{Arcsenh}(x)$ é a função inversa de $\text{senh}(x)$.

2.3 – A Transformada Rápida de Fourier.

O objetivo desta seção é apresentar uma técnica de precificação de opções, desenvolvida por Carr e Madan (1998). A presente técnica tem a vantagem de obter numericamente o valor da opção no tempo de uma maneira eficiente e em tempo real, permitindo inclusive o *hedge* através de modelos realísticos, mesmo para um grande número de opções. A única premissa existente é a existência de uma forma analítica para a função característica da densidade de probabilidade no mundo neutro ao risco. Muitas vezes, tal função é conhecida analiticamente, mas a fórmula fechada do preço da opção (que seria obtida pela inversa de Fourier), não. É então exatamente neste momento que faz-se uso da transformada rápida de Fourier, um processo numérico rápido e simples.

Tal processo encontra-se atualmente bastante difundido e muitos pesquisadores já fizeram uso do método, tal como Thanh (2002) e outros apresentados neste trabalho.

Considere o problema de se precificar uma opção de compra europeia de maturidade T , que está atrelada a uma ação de preço *spot* S_t . A função característica de $s_t = \ln(S_t)$ é definida por:

$$\phi_t(u) = \text{Esp}[\exp(i * u * s_t)].$$

Assumindo que a função característica acima é conhecida analiticamente, Madan e Bakshi (1999) determinaram numericamente a probabilidade (mundo neutro ao risco) de a opção terminar no dinheiro⁸:

$$\text{Pr}(S_T > K) = \Pi_2 = \frac{1}{2} + \pi^{\frac{1}{2}} * \int_0^{\infty} \text{Re}[\exp(-iu * \ln(K)) * \phi_T(u) / iu] du.$$

Similarmente, os pesquisadores acima citados obtiveram numericamente o delta da opção, denotado Π_1 :

⁸ $\text{Re}(z)$ denota a parte real do número complexo z .

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} + \pi^l * \int_0^{\infty} \text{Re}[\exp(-iu * \ln(K)) * \phi_T(u - i) / (iu \phi_T(-i))] du..$$

Assumindo uma ação sem dividendos e taxa de juros r constante, o valor inicial da opção é então calculado da forma que segue:

$$C = S * \Pi_1 - K \exp(-rT) * \Pi_2.$$

Entretanto, as integrais acima dificilmente possuem soluções analíticas e/ou numéricas. Com isso, Carr e Madan (1998) desenvolveram uma outra expressão para o valor da *call* européia:

$$C_T(k) = \pi^l * \exp(-\alpha k) * \int_0^{\infty} \exp(-ivk) * \psi_T(v) dv,$$

onde

$$k = \ln(K), \quad e$$

$$\psi_T(v) = \exp(-rT) * \phi_T(v - (\alpha + 1)i) / (\alpha^2 + \alpha - v^2 + v(2\alpha + 1)i).$$

O parâmetro $\alpha > 0$ é utilizado por motivos de integrabilidade e sua escolha deve ser tal que $\psi_T(0)$ seja finito.

A transformada rápida de Fourier é um método numérico rapidamente implementável para se resolver a integral acima e então se chegar ao preço da opção. Ela transforma a integral em uma soma (com tantas parcelas quanto se queira ganhar em precisão), com base na regra matemática do trapézio e utilizando também a regra de ponderação de Simpson. Para se facilitar a notação, faremos uma redução de escala, fazendo $S_0 = 1$. Com isso, trabalharemos principalmente com valores de $k = \ln(K)$ vizinhos a zero, já que estamos principalmente interessados na precificação de opções no dinheiro, ou seja, com preço de exercício próximo de S_0 ⁹. Tomemos $b > 0$ tal que, para as opções de nosso interesse:

$$-b \leq k \leq +b.$$

Dividamos o intervalo $[-b, +b]$ em N (em geral, uma potência de 2) pequenos intervalos de tamanho $\lambda > 0$. Quanto maior N , maior a precisão da aproximação da integral pelo somatório, porém por outro lado, maior será o trabalho computacional de cálculo. Note que $b = \frac{1}{2} * N\lambda$. Definamos N logaritmos naturais do preço de exercício da opção da seguinte forma:

$$k_u = -b + \lambda * (u - 1), \quad \text{para } u = 1, \dots, N.$$

Façamos $\eta = 2\pi / N\lambda$ e então a aplicação exata da transformada rápida de Fourier nos fornece o preço de uma *call* europeia segundo a expressão a seguir:

$$C(k_u) = \pi^{-1} * \exp(-\alpha k) * \eta/3 * \sum_{j=1}^N \exp[-2\pi i / N * (j-1) * (u-1) + i b v_j] * \psi_T(v_j) * [3 + (-1)^j - \delta_{j-1}],$$

onde $v_j = \eta * (j-1)$ e δ_n representa a função delta de Kronecker.¹⁰ Pesquisas recentes buscam encontrar as escolhas mais apropriadas para os parâmetros η e α . (vide Carr e Madan, 1998).

2.4 – O Modelo Log-Estável de Momento Finito.

O presente modelo trabalha com retornos de ação que respeitam a seguinte equação:

$$dS_t / S_t = (r - q)dt + \sigma * dL_t^{\alpha\beta},$$

onde $L_t^{\alpha\beta}$ denota um movimento α -estável de Lévy com média nula, dispersão $t^{1/\alpha}$, índice de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$ e índice de simetria $\beta \in [-1, 1]$. Percebamos a semelhança formal com o modelo de Black e Scholes (basta trocar $dL_t^{\alpha\beta}$ por dz), onde pressupõe-se que o retorno do ativo siga um caminho log-normal. Aqui, presume-se a mesma hipótese, só que o caminho passa a ser log-estável. Assim como para as distribuições log-normais, uma distribuição é log-estável quando o logaritmo da variável aleatória segue uma distribuição estável.

⁹ Para opções fora do dinheiro, Carr e Madan (1998) fazem uma outra aproximação, porém de resultados análogos aos que chegaremos aqui.

As distribuições α -estáveis (ou simplesmente estáveis) foram primeiramente caracterizadas por Paul Lévy (1924) ao longo dos anos 20 do século passado. Nolan (2002-a), Nolan (2002-b) e Nolan e Fofack (2002) também abordam tais distribuições mais recentemente. Uma variável aleatória X é dita α -estável se para X_1 e X_2 cópias independentes de X e quaisquer constantes positivas a e b ,

$$aX_1 + bX_2 = cX + d,$$

para algum $c > 0$ e algum d real. O sinal de igualdade na equação acima denota que ambas variáveis (do lado esquerdo e do lado direito) possuem a mesma distribuição de probabilidade. Em geral, quatro parâmetros são suficientes para se descrever uma distribuição α -estável: um índice de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$, um índice de simetria

$\beta \in [-1, 1]$, um parâmetro de escala $\gamma > 0$ e um parâmetro de localização δ real. Por exemplo, para $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ (distribuição simétrica), temos a distribuição normal e para este caso, o modelo log-estável de momento finito recai exatamente sobre o modelo de Black e Scholes.

Assim, o diferencial deste modelo está na hipótese a respeito da distribuição de probabilidade envolvida no processo estocástico para determinação do caminho percorrido pelo ativo, caminho este que será fundamental na avaliação do preço de uma opção sobre o ativo referido. E ainda se levarmos em consideração que a distribuição normal é um caso particular da distribuição α -estável, espera-se que o modelo log-estável de momento finito nos forneça resultados superiores quando comparado ao modelo de Black e Scholes, apesar de um esforço computacional maior. Carr e Wu (2000) confirmam esta previsão, bem como da Silva e Lemgruber (2001), que aplicaram tal distribuição para testes de VaR¹¹.

O modelo parte da hipótese $\beta = -1$, a fim de se ter a distribuição de retornos totalmente assimétrica para a esquerda da média, que no caso é igual a zero. Aliás, esta é a hipótese que diferencia o modelo log-estável de momento finito de outros modelos de precificação que também levam em conta distribuições α -estáveis. Segundo Carr (2000), se $\beta > -1$, a cauda da distribuição de retorno à direita torna-se gorda a ponto de o preço esperado da ação e conseqüentemente o preço de *calls* se tornarem infinitos!

¹⁰ Função delta de Kronecker: $\delta_n = 1$, para $n = 0$ e $\delta_n = 0$, para $n <> 0$.

¹¹ Value at Risk.

Com tudo o que foi discutido acima, o logaritmo do preço relativo do ativo na data τ de maturidade da opção é dado conforme abaixo:

$$s_{\tau} = \ln(S_{t+\tau}/S_t) = (r - q + \sigma^{\alpha} \sec(1/2 * \pi \alpha)) * \tau + \sigma L_{\tau}^{\alpha - 1}.$$

O modelo possui apenas dois parâmetros livres: $\sigma > 0$ (dispersão) e $\alpha \in (0, 2]$. As outras entradas já foram definidas anteriormente. Com base na equação acima, podemos obter a equação característica do retorno s_{τ} :

$$\phi_{\tau}(u) = \text{Esp}[\exp(i * u * s_{\tau})] = \exp(iu(r - q + \sigma^{\alpha} \sec(1/2 * \pi \alpha)) * \tau - \tau * (iu\sigma)^{\alpha} \sec(1/2 * \pi \alpha)).$$

De posse da função característica, aplica-se a transformada rápida de Fourier, explicada na seção 2.3, e determina-se numericamente o preço da opção sobre o ativo S.

2.5 – O Modelo CGMY.

Carr, Geman, Madan e Yor (2002) desenvolveram um modelo contínuo no tempo, denominado CGMY, que permite tanto a difusão quanto os saltos, podendo estes últimos serem ainda de atividade finita ou infinita. Os parâmetros desse processo permitem ainda que o componente do salto tenha variação finita ou infinita. Os resultados mostraram que a componente relacionada à difusão pode ser desconsiderada ao se descrever a estrutura fina de retorno de ativos, desde que o processo de salto utilizado seja o de atividade infinita e variação finita.

Através das observações diárias, faz-se uma inferência do caminho descrito pelo ativo a fim de torná-lo contínuo. Isso é possível de ser feito através da função característica do logaritmo do preço da ação e garantido pelo teorema de Lévy Khintchine que, dentre outras coisas, afirma a relação biunívoca entre um processo infinitamente divisível e sua função característica. Os parâmetros são determinados pelo método de máxima verossimilhança.

Para o processo em questão, a função característica fica totalmente determinada pela taxa de *drift* a , pelo coeficiente de difusão b e pela densidade de Lévy $k(x)$. Especificamente, se $X(t) = \ln[S(t)]$ é um processo infinitamente divisível com um componente de salto de variação finita e incrementos independentes e homogêneos, então sua função característica é unicamente determinada pela expressão abaixo:

$$E_{sp} [exp(iuX(t))] = exp \{ iuat - 0,5 * u^2 b^2 t + t * \int [exp(iux) - 1] * k(x) dx \}.$$

A densidade de Lévy mede a taxa de chegada de saltos de tamanho x por meio da expressão $k(x)dx$. O componente de salto do processo está totalmente caracterizado pela densidade de Lévy.

O processo CGMY é baseado na chamada densidade de Lévy-CGMY, que é uma generalização da densidade de Lévy utilizada no processo gama de variância.

$$K_{CGMY}(x) = C * exp[-F(G, M) * |x|] / |x|^{(1+Y)},$$

onde $F(G, M) = G$ para $x < 0$ e $F(G, M) = M$ para $x > 0$. Os parâmetros são C, G, M e Y , que estão sujeitos às restrições: $C > 0$, $G \geq 0$, $M \geq 0$ e $Y < 2$. Nós denotaremos por $X_{CGMY}(t; C, G, M, Y)$ o processo infinitamente divisível de incrementos independentes com densidade de Lévy dada pela expressão acima.

Os parâmetros desempenham funções importantes do processo. O parâmetro C expressa uma medida do nível geral de atividade. Os parâmetros G e M respectivamente controlam a razão de decaimento exponencial à direita e à esquerda da densidade de Lévy, permitindo distribuições assimétricas quando eles são diferentes. Por exemplo, para $G < M$, a cauda esquerda da distribuição de $X(t)$ é mais grossa. Se o parâmetro Y for menor que zero, isto significa que o processo possui atividade finita. Para $0 < Y < 1$, o processo possui atividade infinita e variação finita e para $1 < Y < 2$, a variação é infinita.

Teorema¹²: A função característica do processo infinitamente divisível de incrementos independentes com densidade de Lévy e sem o componente de difusão é dada por:

$$\varphi_{CGMY}(u, t; C, G, M, Y) = exp \{ t * C * \Gamma(-Y) * [(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y] \}.$$

¹² Para a demonstração deste teorema, veja Carr, Geman, Madan, e Yor (2002).

O modelo CGMY assume que o componente de *Martingale* do movimento do logaritmo do preço da ação (ou de outro ativo) é dado pelo processo CGMY. Assim, a dinâmica do preço da ação é dada pela expressão abaixo:

$$S(t) = S(0) * \exp[(\mu + \omega)t + X_{CGMY}(t; C, G, M, Y)],$$

onde μ é taxa média de retorno e ω representa uma correção de convexidade definida pela fórmula que segue:

$$\exp(-\omega t) = \varphi_{CGMY}(-i, t; C, G, M, Y).$$

A fim de se acrescentar um componente de difusão no processo, a expressão abaixo define o processo CGMY estendido:

$$X_{CGMYe}(t; C, G, M, Y, \eta) = X_{CGMY}(t; C, G, M, Y) + \eta * W(t),$$

onde $W(t)$ representa um movimento Browniano padrão independente do processo $X_{CGMY}(t; C, G, M, Y)$ e η , um parâmetro a ser estimado. Desta maneira, o processo CGMY estendido teria dinâmica dada por:

$$S(t) = S(0) * \exp[(\mu + \omega - 0,5 * \eta^2)t + X_{CGMYe}(t; C, G, M, Y, \eta)].$$

A função característica para o logaritmo do preço da ação neste modelo estendido CGMY (com difusão) é dada por:

$$\varphi_{ln(S)}(u, t) = \exp(iu * \{ \ln[S(0)] + (\mu + \omega - 0,5 * \eta^2)t \}) * \varphi_{CGMY}(u, t; C, G, M, Y) * \exp(-\eta^2 u^2 / 2).$$

De forma análoga ao modelo anterior, aplica-se a transformada rápida de Fourier e determina-se numericamente o preço da opção sobre o ativo S.

3. METODOLOGIA

O Modelo Seno Hiperbólico será o utilizado por esta pesquisa. Sua escolha se deu basicamente pela existência de uma fórmula fechada para ser trabalhada com variáveis extremamente simples bem como o algebrismo da equação de precificação. Além disso, os parâmetros a serem estimados são apenas dois, o que torna tal modelo bastante parcimonioso. Testaremos o Modelo Seno Hiperbólico frente tanto ao mercado quanto ao modelo de Black e Scholes.

A descrição da metodologia foi dividida em quatro seções. Nas duas primeiras, trata-se da composição e da organização dos dados, bem como de toda a atmosfera relativa às séries escolhidas. Na terceira seção, são detalhados os procedimentos para a precificação das opções via o modelo de Black e Scholes. Dentre outras coisas, são explicadas as metodologias de cálculo da taxa livre de risco e da volatilidade a cada dia útil. Na seção que fecha este capítulo, explica-se toda a metodologia aplicada para a precificação das opções pelo método do Modelo Seno Hiperbólico, principalmente no tocante às estimativas dos parâmetros livres do modelo.

3.1 – Amostra de Dados.

A série inicialmente coletada para a presente pesquisa é composta de cotações diárias de fechamento da ação TNLP4, da empresa Telemar S.A., no mercado à vista, pelo período de 4 de janeiro de 1999 a 2 de abril de 2003. Tal período totaliza 1.051 observações diárias, importantes, como veremos mais à frente, para o cálculo da volatilidade do ativo necessária no modelo de Black e Scholes. A escolha do ativo em questão se deu pela sua liquidez no mercado brasileiro e ampla facilidade de obtenção de dados. Conseqüentemente, também foi coletada a série de dados relativos a todas as opções de compra sobre a ação acima mencionada negociadas durante o período compreendido entre 28 de julho de 2000 e 20 de março de 2003, gentilmente cedidos pela Bolsa de Valores de São Paulo.¹³ Os dados envolvem código, volume negociado, número de negociações, preços de abertura, médio e de fechamento, bem como preço de exercício

¹³ Agradecemos à BOVESPA pelo fornecimento desses dados.

e data de vencimento da opção. A série de opções totaliza um total de 5.204 observações. Foram incluídos apenas os dados diários de opções com um mínimo de 30 negociações no dia e ainda foram excluídas as opções que venciam no dia corrente (pois não há necessidade de um modelo para se precificar tais opções!).

Eventos como dividendos, bonificações e subscrições são levados em consideração no cálculo do preço da opção, através do ajuste no preço de exercício da opção no primeiro dia de negócios “EX” (respeitando o número mínimo de 30), ou seja, após o evento. Os eventos durante o período estudado estão sumarizados na tabela 3.1.

TABELA 3.1: Eventos Sobre o Ativo TNLP4 Durante o Período de 4 de Janeiro de 1999 a 6 de Maio de 2003. Os Valores Monetários Estão Expressos em Reais.

Data (EX-1)	Descrição
30/4/1999	Dividendo de \$618.42/M por ação
28/4/2000	Dividendo de \$606.46/M por ação
28/4/2000	Bonificação de 0.11575 novas ações por cada possuída
28/4/2000	Subscrição de 0.0012586 ações a \$0.30 por cada possuída
9/5/2001	Dividendo de \$670.00/M por ação

9/5/2001	Subscrição de 0.012747 ações a \$0.03725 por cada possuída
25/4/2002	Dividendo de \$811.98/M por ação
26/4/2002	Subscrição de 0.015145 ações a \$0.03136 por cada possuída
30/12/2002	Dividendo de \$0.0013331 por ação
8/4/2003	Colocação de 6,711M ações

Fonte: Bolsa de Valores de São Paulo

3.2 – Organização dos Dados.

As opções foram organizadas em séries de acordo com o vencimento. Assim, opções com a mesma data de vencimento pertenciam a uma mesma série. Além disso, dentro de cada série, as opções foram diariamente classificadas em “short”, “medium” e “long”, doravante designadas por S, M e L, respectivamente. As classificadas por S estavam a no máximo 10 dias do vencimento, enquanto que as opções L estavam a mais de 20 dias do vencimento. As opções M estavam a um período intermediário do vencimento (entre 11 e 20 dias, inclusive). Com isso, havia 21 séries (explicitadas no anexo 3) e 58 sub-séries ao todo, visto que não havia em nossa amostra de dados as sub-séries 1L, 20S, 20M, 21S E 21M. O motivo que explica este tipo de classificação será detalhado mais adiante nesta dissertação.

Outro ajuste dos dados é relativo à exclusão das opções arbitráveis. Uma das condições fundamentais que o preço de uma opção de compra (tipo europeu) deve satisfazer é:

$$C \geq S - VP(K),$$

ou seja, o preço da opção deve ser no mínimo igual à diferença entre o preço da ação (sobre a qual a opção prescreve) e o valor presente do preço de exercício da *call*. Caso esta condição não esteja satisfeita, a opção é passível de arbitragem, o que indicaria um erro grosseiro de apreçamento. Assim, com o intuito de não afetar

o nosso teste, 201 observações que não satisfaziam a essa condição foram excluídas de nossa base, restando portanto 5.003 observações.

3.3 – Estimativa Pelo Método de Black e Scholes.

O modelo de Black e Scholes serve neste estudo como referência de comparação com o modelo estudado. O modelo resulta na fórmula fechada de precificação de uma opção de compra europeia abaixo:

$$C = S * N(d_1) - VP(K) * N(d_2),$$

onde

$$d_1 = (\ln(S/K) + (r + 0,5*\sigma^2)*t) / (\sigma * Raiz(t))$$

$$e d_2 = d_1 - \sigma * Raiz(t).$$

O modelo é de fácil implementação. As entradas são o preço do ativo S , o preço de exercício da opção K , o tempo até a maturidade t , a taxa livre de risco r e a volatilidade σ do ativo-objeto. Os três primeiros valores são observáveis diretamente. As próximas duas seções explicam em detalhes os procedimentos tomados por esta pesquisa para se estimar tanto a taxa r quanto a volatilidade σ .

3.3.1 – Estimativa da Taxa Livre de Risco.

Um problema comum no mercado financeiro é o de obter diariamente taxas de juros para todos os prazos possíveis e não apenas os mais negociados. Os prazos mais comuns são de 21, 42, 63, 84, 105, 126 etc podendo haver, dependendo do período, algumas pequenas variações. A este conjunto de taxas conhecidas, fornecidas para esta pesquisa pela Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), dá-se o nome de estrutura a termo da taxa de juros. Para os prazos em que não há taxa disponível, algum procedimento de interpolação entre as taxas disponíveis se faz necessário. Adams e Deventer (1994), Shea (1985) e McCulloch (1975) são exemplos de pesquisas que discorrem sobre este assunto. Neste trabalho, seguimos a metodologia abordada por Varga (2000), que se utiliza de curvas denominadas de *cubic-splines* para a interpolação. Assim, diariamente, são obtidas taxas a termo para todos os prazos desejados. A escolha de tal método, segundo

Varga, se justifica pelo fato de ajustes por *cubic-spline* fazerem muito mais sentido econômico do que outros procedimentos normalmente adotados no mercado brasileiro.

Para entrada no modelo, a taxa logarítmica foi utilizada devido a melhores propriedades matemáticas. Grossman (1977) confirma em seu trabalho que, para situações economicamente normais, a diferença é desprezível.

3.3.2 – Estimativa da Volatilidade do Ativo-Objeto.

Outro ponto bastante importante na modelagem de Black e Scholes é a estimativa da volatilidade do ativo-objeto. Hull (2000) comenta diferentes métodos para se estimar tal variável diariamente a partir de dados históricos. Adotamos na presente pesquisa a metodologia conhecida pela sigla EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average Model*).

O modelo descreve a variância (quadrado da volatilidade) de hoje como a média ponderada dos quadrados dos retornos logarítmicos diários e passados. O nome do modelo advém do fato de os pesos irem decrescendo exponencialmente com o tempo. Matematicamente, temos a seguinte expressão:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i * u_{n-i}^2;$$

onde u_j representa o retorno diário logarítmico do ativo, e $\alpha_i = \lambda * \alpha_{i-1}$, com λ (entre zero e um) sendo o parâmetro de decaimento do modelo. Como a soma dos pesos tem de ser igual a um e tendendo na expressão acima m para o infinito, encontra-se:

$$\alpha_1 = 1 - \lambda.$$

No dia n , temos então:

$$\sigma_{n-1}^2 = \sum_{i=2}^m \alpha_{i-1} * u_{n-i}^2;$$

$$\lambda * \sigma_{n-1}^2 = \sum_{i=2}^m \lambda * \alpha_{i-1} * u_{n-i}^2;$$

$$\lambda * \sigma_{n-1}^2 = \sum_{i=2}^m \alpha_i * u_{n-i}^2;$$

$$\lambda * \sigma_{n-1}^2 + \alpha_1 * u_{n-1}^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i * u_{n-i}^2;$$

Assim, substituindo na fórmula acima α_i por $(1 - \lambda)$ e percebendo que o lado direito desta equação nada mais é do que a variância do dia n , esta metodologia de pesos leva a uma fórmula peculiar de se atualizar a estimativa diariamente:

$$\sigma_n^2 = \lambda * \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) * u_{n-1}^2.$$

Inicializa-se a fórmula acima com $\sigma_1^2 = u_0^2$. Convém ressaltar que, por detrás de toda essa modelagem para a obtenção das volatilidades diárias, há a hipótese bastante comum de que, em média, o retorno do ativo é nulo. De fato, em nossa amostra¹⁴, o retorno médio foi de 0,06%, não sendo significativamente diferente de zero (a hipótese nula de valor médio nulo não pôde ser descartada, sob um teste estatístico com intervalo de confiança de 95%).

O método de EWMA possui a vantagem de precisar de relativamente poucos dados passados. A qualquer momento presente, precisamos apenas da estimativa corrente da volatilidade e do mais recente retorno do ativo. A cada dia, os valores anteriores podem ser descartados. Tal metodologia foi desenvolvida com o intuito de permitir variações diárias na volatilidade mediante retornos excessivamente baixos ou altos. Como, em geral, o parâmetro λ está próximo de um, a fórmula acima dá um peso significativo ao valor da volatilidade anterior, mas também leva em consideração (com um peso de $1-\lambda$) o último retorno do ativo.

¹⁴ Amostra de retornos do ativo TNLP4 de 5 de Janeiro de 1999 a 2 de Abril de 2003, totalizando 1050 retornos.

J. P. Morgan utiliza o modelo EWMA com um λ igual a 0,94. Segundo a instituição, tal valor otimiza as previsões quando comparamos os valores previstos pelo modelo com a média aritmética dos quadrados dos retornos logarítmicos dos subseqüentes 25 dias.

Uma possibilidade de estimativa do parâmetro de decaimento λ é, dado um período de observações, minimizar a soma dos erros quadráticos tomando-se por base o desvio padrão de um número fixo de retornos em torno do dia em questão. A crítica que se faz a essa metodologia é que ela leva em consideração o desvio-padrão como base para o cálculo do erro (que será minimizado). Não existe nenhuma comprovação de que o desvio-padrão de um número fixo de retornos ao redor do dia em si seja uma boa estimativa para a volatilidade. E, além do mais, se deseja uma metodologia para se aprimorar a estimativa da volatilidade pelo desvio-padrão e esta começa exatamente baseando-se no desvio-padrão! Sendo assim, seria melhor logo voltar à estimativa da volatilidade pelo desvio-padrão. Trata-se de uma incoerência dessa modelagem e por este motivo procedemos de outra forma.

A escolha do parâmetro λ por esta pesquisa baseou-se na metodologia de máxima verossimilhança, utilizando-se por base a função de densidade de probabilidade normal. A idéia do método é fazer a escolha do(s) parâmetro(s) de forma a maximizar a chance de ocorrência dos dados em questão. Hull (2000) desenvolve tal metodologia demonstrando que, com o artifício de tomar o logaritmo da função de verossimilhança e eliminando-se em seguida as constantes, a expressão (função de máxima verossimilhança) a ser maximizada para se determinar o parâmetro λ é:

$$\sum_{i=1}^m [-\ln(\sigma_i) - u_i^2 / \sigma_i].$$

Para tal maximização, foi utilizado o algoritmo *Solver* do programa *Excel* da *Microsoft* e portanto assim determinado o parâmetro λ do método EWMA de estimativa da volatilidade. O valor encontrado foi 0,95 com duas casas decimais de aproximação.

A posteriori, notou-se que o valor 0,94 para λ , como a agência J. P. Morgan utiliza, resultaria em uma soma de erros quadráticos menor para nossa amostra. Porém, mesmo assim, optou-se nesta pesquisa pelo método de máxima verossimilhança por se tratar de um método científico de estimativa de

parâmetro(s) aplicado pela grande maioria dos trabalhos consultados para esta dissertação. É difícil de se entender (e a agência J. P. Morgan não explica) como um valor de parâmetro constante dará sempre melhores resultados, independentemente da amostra em questão.

3.4 – Estimativa Pelo Método Seno Hiperbólico.

Retornemos à equação que precifica uma opção de compra europeia, segundo o Modelo Seno Hiperbólico:

$$\begin{aligned}
 C(S, t) = & \frac{1}{2} * \exp(-q(M - t)) * (S + \text{raiz}[S^2 + \beta^2 \exp(-2\mu(T - t))]) * \\
 & [N(d_+ + \alpha * \text{raiz}(M - t)) + N(d_- - \alpha * \text{raiz}(M - t))] \\
 & - \frac{1}{2} * \beta^2 * \exp[-q(M - t) - 2\mu(T - t)] * (S + \text{raiz}[S^2 + \beta^2 \exp(-2\mu(T - t))])^{-1} * \\
 & [N(d_+ - \alpha * \text{raiz}(M - t)) + N(d_- + \alpha * \text{raiz}(M - t))] \\
 & - K \exp(-r(M - t)) * [N(d_+) - N(d_-)],
 \end{aligned}$$

onde:

$$d_{\pm} = \{ \pm \text{arcsenh}[S \exp(\mu(T - t)) / \beta] - \text{arcsenh}[K \exp(\mu(T - t)) / \beta] \} / \alpha * \text{raiz}(M - t);$$

$$\beta = S_0 * \exp(\mu T) * \text{csch}(-\alpha L) \quad \text{e} \quad \mu = r - q - \alpha^2 / 2.$$

As variáveis de entrada da equação são o preço S do ativo-objeto sobre o qual a opção atua e o tempo corrido t desde o lançamento da opção. Os parâmetros observáveis são, na ordem em que aparecem na equação: a taxa de dividendos q ; a maturidade original da opção M ; o valor inicial S_0 do ativo-objeto quando do lançamento da opção e o preço de exercício K da opção. O parâmetro T é qualquer valor maior que a maturidade mais longa dentre as opções que se deseja precificar pois tal parâmetro não tem influência sobre o preço da opção, visto que ele é cancelado algebricamente na equação acima. Sua função é apenas referencial. A taxa livre de risco r foi estimada da mesma forma como explicado na metodologia do modelo de Black e Scholes. Os parâmetros livres que precisam ser estimados são α e L .

A equação acima foi desenvolvida de modo a permitir hoje estimativas não-viesadas futuras do preço da opção. Para isso, basta entrar na equação com o tempo corrido t desde o lançamento da opção até a data futura e com o valor esperado (não-viesado) S na data futura em questão. Nesta pesquisa, cada opção foi valorada no dia presente, o que possibilitou a seguinte estratégia: a cada dia, virtualmente, para cada opção existente, uma nova opção era lançada com exatamente as mesmas características da opção original (logo as duas teriam obrigatoriamente o mesmo valor). Tal estratégia facilitou a implementação do modelo pois desta forma, t era sempre zero, M era sempre o tempo para a expiração da *call* e S sempre igualava S_0 .

3.4.1 – Estimativa dos Parâmetros Livres α e L .

Para implementarmos o Modelo Seno Hiperbólico, uma das etapas mais importantes era a estimativa dos parâmetros α e L . Nossa idéia era seguir uma estratégia capaz de ser seguida na prática pelo mercado possivelmente como parte de estratégias de *hedge* ou mesmo para aferir lucros acima dos normais.

Inicialmente, as opções estavam ordenadas pelo dia corrente, ou seja, dia a dia, estavam listadas as opções existentes naquele momento e além disso, dentro de cada dia, elas encontravam-se em ordem crescente de preço de exercício. Nossa primeira alternativa foi a seguinte: adotamos uma janela móvel composta de 50 opções exatamente na ordem em que se encontravam, conforme a descrição acima. Esta janela geraria as estimativas dos parâmetros para a próxima opção da lista. Assim, as primeiras 50 opções da lista não seriam precificadas, elas apenas serviriam de base de dados para a estimativa de α e L da 51ª opção.

Para cada opção dentro da janela, foi calculado o quadrado do erro absoluto, ou seja, o quadrado do desvio do modelo em relação ao preço de mercado (preço de fechamento) da opção. Os parâmetros α e L estimados para a opção seguinte à janela eram aqueles valores que minimizariam a soma destes erros. Uma estratégia bastante simples, porém com duas críticas fortes. Em primeiro lugar, o critério de janela móvel leva em consideração apenas a ordem das opções, deixando completamente esquecidas algumas características importantes. Por exemplo, em dias logo após um vencimento, a janela era composta basicamente por opções relativas a este vencimento, a poucos dias da maturidade. E a opção exatamente após a janela, para a qual os parâmetros seriam estimados, era uma opção ainda a muitos dias do seu vencimento. Com isso, utilizávamos opções para estimar α e L com características economicamente bem distintas da

opção que seria de fato precificada em nossa estratégia. Outro erro grosseiro era o fato de muitas vezes se utilizarem, dentro da janela, opções no mesmo dia que a opção a ser precificada, o que, na prática, é claramente impossível.

A segunda crítica a essa estratégia se dá por conta de sua implementação. Lembrando, nosso banco de opções contava agora com exatamente 5.003 *calls*. Excetuando-se as primeiras 50, restariam 4.953 opções para as quais deveriam ser estimados α e L . Para tal, utilizou-se programação em *Visual Basic*, aplicado em *Excel* da *Microsoft*. A fim de se minimizar a soma dos erros, fez-se uso da ferramenta *solver*. Dessa forma, tal ferramenta era utilizada exatas 4.953 vezes, o que implicava num tempo significativamente longo.

Com base nessas críticas, buscou-se uma diferente estratégia. Conforme explicado na seção 3.2, as 21 séries de opções foram sub-classificadas em L (*long*), M (*medium*) e S (*short*) de acordo com o tempo de maturidade de cada uma. A idéia era superar principalmente as duas críticas comentadas no parágrafo anterior. Desta maneira, procedeu-se da seguinte forma: para cada sub-série, foram calculados os valores de α e L que minimizavam a soma dos erros já explicados dentro da própria sub-série. As janelas móveis eram agora cada sub-série. Estas estimativas foram utilizadas para a precificação de todas as opções do mesmo tipo, porém da série seguinte. Assim, por exemplo, as opções da série 7M estimaram os parâmetros das opções 8M. Com esta metodologia, buscava-se ao mesmo tempo agrupar opções com mesmas características quanto ao vencimento e ganhar tempo na implementação, visto que as estimativas serviriam para todas as opções da sub-série análoga posterior.

Portanto, a ferramenta *solver* foi agora utilizada apenas 55 vezes, pois das 58 sub-séries iniciais, três delas não possuíam sub-série posterior (19S, 19M e 21L). Por outro lado, as três primeiras sub-séries (1S, 1M e 2L), totalizando um total de 152 *calls*, serviram apenas de base de estimativa dos parâmetros, não sendo portanto precificadas. Com isso, a presente pesquisa precificou um total de 4.851 opções com base no Modelo Seno Hiperbólico.

4. RESULTADOS

Para cada observação na amostra, dois erros relativos ao preço de fechamento de mercado foram calculados pela razão das diferenças do preço de mercado e de cada modelo com o preço de mercado. Assim, os valores positivos/negativos dos erros indicam que o modelo subavalia/superavalia o preço negociado da opção. Também foi calculado o erro relativo do Modelo Seno Hiperbólico para com o Modelo de Black e Scholes.

Toda a análise realizada por este trabalho é baseada em testes estatísticos de p-valor bicaudal aproximados pela distribuição normal com nível de significância igual a 5%. A aproximação pela normal se baseia no fato de a amostra ser grande o suficiente para isto, como defendem Freund e Simon (1997).

4.1 – Análise Geral da Amostra de Dados.

Com as 4851 opções precificadas, um primeiro teste foi realizado. A tabela 4.1 compara a média dos desvios (erros) de precificação dos dois modelos em relação ao mercado e entre si, numa metodologia bastante semelhante à utilizada por Cunha Jr. e Lemgruber (2002) e detalhada em Freund e Simon (1997). As hipóteses nulas (H_0) dizem respeito ao desvio de cada modelo (erro relativo ao mercado) e de um modelo relativo ao outro serem nulos. As hipóteses H_1 negam H_0 , ou sejam, se referem a desvios (erros) diferentes de zero. A média dos erros para o Modelo de Black e Scholes foi elevada e é significativamente diferente de zero, o que representa dizer que tal modelo apresentou desvios sistemáticos em relação ao preço de fechamento do mercado. Já a respeito do Modelo Seno Hiperbólico, o teste não pôde rejeitar a hipótese nula de que, em média, o modelo converge para o mercado, o que é um ponto positivo para o modelo. O terceiro teste indica que a hipótese de que os modelos apresentam resultados iguais não pode ser rejeitada, o que é de certa forma surpreendente em vista dos dois resultados anteriores.

Tabela 4.1: Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 15/09/2000 até 20/03/2003. Total de 4851 Observações.

Testes Estatísticos	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	16,07%	-2,33%	-1427,60%
Desvio Padrão	6,239896627	0,691971971	513,1109253
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	1,793461733	-2,34094364	-1,937808126
p-valor (bi-caudal)	7,29%	1,92%	5,26%
Resultado Teste (5%)	Aceitar H0	Rejeitar H0	Aceitar H0

Entretanto, com um pouco de atenção, podemos perceber que a média dos erros aferidos pelo Modelo de Black e Scholes foi bem mais próxima de zero do que a média do seu concorrente. Mas justamente o Modelo Seno Hiperbólico teve a hipótese nula (média de erros igual a zero) aceita e isto se explica pelo altíssimo valor do desvio-padrão. Um alto valor de desvio-padrão significa a existência de erros muito altos na amostra. O alto valor do desvio-padrão também explica o resultado (até então surpreendente) do terceiro teste. Alguns erros extremamente grosseiros apareceram, tais como 2.443.204 %! E a grande maioria dos erros grosseiros estava associada a opções bastante fora do dinheiro, onde os respectivos valores encontravam-se na casa de poucos centavos, muitas mesmo abaixo de um centavo (preço segundo um dos modelos). Muitas opções estavam tão fora do dinheiro que seus valores eram praticamente nulos, ao passo que o preço de mercado era obrigatoriamente dado por um múltiplo do centavo, a menor unidade monetária. Como o erro era calculado de maneira relativa, isso explica estes altos valores encontrados, principalmente no que diz respeito à comparação entre os dois modelos. Citando um exemplo concreto: a opção TNLPB21 teve no dia 16/02/2001 fechamento de 1 centavo de real. O Modelo Seno Hiperbólico precificava tal opção em R\$ 0,000030 ao passo que o modelo de Black e Scholes, R\$ 0,0000000012, gerando erros de 99,7% e 100%, além de 2.443.204% de erro entre os dois modelos. Esta opção muito provavelmente teve sua última negociação em algum momento do dia com condições diferentes das do fechamento, onde alguns investidores

acreditaram que a opção valeria R\$ 0,01, mesmo porque este é o valor mínimo de negociação. Trata-se do conhecido erro de assincronismo dos dados. Além disso, a opção não pode no mercado ter valor zero, então o mercado está dando para esta opção o preço mínimo possível, visto que não há como se estabelecer o preço exato dado por um dos modelos, por limitações da precificação discreta. Em teoria então, a precificação do mercado estaria totalmente de acordo com os dois modelos e então o erro absurdamente alto estaria fora de propósito.

A fim de não permitir que tais valores influenciasssem negativamente os resultados, filtramos o nosso banco de dados, impondo um limite máximo de 100% para o erro relativo absoluto tanto para os dois modelos em relação ao mercado quanto para a comparação entre os dois modelos. A idéia é que erros superiores a tal valor (tomado arbitrariamente) seriam oriundos de erros grosseiros tais como falha na anotação de dados etc. Desta maneira, um total de 913 opções foram excluídas, a grande maioria com preços extremamente baixos. Assim, restaram 3.938 opções sobre as quais os resultados a partir de agora passam a ser discutidos.

Com o banco de dados alterado, procedeu-se ao mesmo teste anteriormente realizado, com os resultados reportados na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 15/09/2000 até 20/03/2003. Total de 3938 Observações.

Testes Estatísticos	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	8,16%	3,84%	-0,64%
Desvio Padrão	0,351016801	0,341076874	0,396466135
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	14,58223059	7,066488623	-1,00687848
p-valor (bi-caudal)	0,00%	0,00%	31,40%
Resultado Teste (5%)	Rejeitar H0	Rejeitar H0	Aceitar H0

Como era de se esperar, os desvios-padrão diminuíram consideravelmente e a única hipótese nula aceita é a da igualdade de resultados dados pelos modelos, com uma margem de segurança bastante significativa, conforme pode ser observado pelo p-valor.

Vasculharam-se ainda regressões lineares dos preços teóricos dados por cada um dos modelos contra o preço de fechamento da opção no mercado¹⁵. O Modelo Seno Hiperbólico teve melhor aderência aos preços de fechamento do mercado. O R-múltiplo foi maior (0,991) e o coeficiente de explicação R^2 ajustado superou 98%, ou seja, o modelo consegue explicar mais de 98% dos fatores que possuem alguma influência sobre o preço de fechamento da opção no mercado (o Modelo de Black e Scholes atingiu um R^2 ajustado de pouco menos de 97%). Além disso, se o modelo fosse perfeito (sempre tomando-se o mercado como referencial), esperar-se-ia o coeficiente de interseção igual a zero e o coeficiente da variável igual a um, pois a regressão ideal teria como resultado a igualdade entre os preços de mercado e do modelo. O coeficiente de interseção do Modelo Seno Hiperbólico ficou mais próximo do zero (0,029) com uma estatística t menor, o que é ponto favorável. E o coeficiente da variável do Modelo Seno Hiperbólico se aproximou mais de um (0,988) do que o do Modelo de Black e Scholes (0,977), tendo ainda maior significância estatística, fato comprovado pelo maior valor da estatística t associada, o que é outro ponto positivo para o Modelo Seno Hiperbólico.

4.2 – Análise por Série de Opções.

A fim de se averiguar melhor os resultados, fizemos a mesma análise para cada uma das 17 séries completas de opções precificadas (séries 3 a 19). Os resultados foram bastante diversificados e nenhuma tendência pôde ser dada como clara. Por exemplo, a série três, com vencimento no dia 18 de dezembro de 2000, teve todas as três hipóteses descartadas, com o Modelo Seno Hiperbólico tendo forte tendência de superavaliação, caso contrário do Modelo Black e Scholes, com tendência de subavaliação. Os resultados estão na tabela 4.3. As séries 4, 5, 10, 13 e 19 também rejeitaram as três hipóteses nulas, porém as tendências de sub/superavaliação dos modelos alternaram-se sem nenhuma tendência observável.

¹⁵ Ver resultados das regressões no anexo 4.

Tabela 4.3: Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 com Vencimento em 18/12/2000 (Série 3) Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si. Total de 194 Observações.

Testes Estatísticos	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	-8,31%	5,67%	-17,39%
Desvio Padrão	0,245075219	0,240396057	0,246816814
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	-4,7218041	3,285374209	-9,813454241
p-valor (bi-caudal)	0,00%	0,10%	0,00%
Resultado Teste (5%)	Rejeitar H0	Rejeitar H0	Rejeitar H0

Por outro lado, a série seis, com vencimento no dia 18 de junho de 2001, teve resultados bastante favoráveis ao Modelo Seno Hiperbólico enquanto que o Modelo de Black e Scholes teve forte tendência de superavaliação da opção. Os resultados estão reportados na tabela 4.4.

Tabela 4.4: Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 com Vencimento em 18/06/2001 (Série 6) Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si. Total de 145 Observações.

Testes Estatísticos	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	-1,12%	-21,66%	10,17%
Desvio Padrão	0,210890437	0,299855134	0,335497073
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	-0,638346147	-8,698592804	3,651426518
p-valor (bi-caudal)	52,32%	0,00%	0,03%
Resultado Teste (5%)	Aceitar H0	Rejeitar H0	Rejeitar H0

Já as séries 8 (vencimento em 15 de outubro de 2001) e 14 (21 de outubro de 2002), por exemplo, tiveram excelentes resultados para o Modelo de Black e Scholes, tendo o Modelo Seno Hiperbólico forte tendência de subavaliação nestes dois casos. A hipótese favorável ao Modelo de Black e Scholes foi aceita com um p-valor (bi-caudal) acima de 60% na série 14! Veja a tabela 4.5.

Tabela 4.5: Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 com Vencimento em 21/10/2002 (Série 14) Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si. Total de 314 Observações.

Testes Estatísticos	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	31,98%	1,21%	18,84%
Desvio Padrão	0,284254519	0,431415786	0,395249889
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	19,93554328	0,498948697	8,447801283
p-valor (bi-caudal)	0,00%	61,78%	0,00%
Resultado Teste (5%)	Rejeitar H0	Aceitar H0	Rejeitar H0

Em algumas séries, como a série 18, com vencimento em 17 de fevereiro de 2003, ambos os modelos foram rejeitados, entretanto foi aceita a hipótese de que os modelos forneçam resultados estatisticamente indistinguíveis. Nesta série, o preço de mercado esteve com forte tendência de estar acima dos preços dados pelos modelos. Esses resultados estão na tabela 4.6.

Assim, resultados de diferentes conclusões foram reportados ao longo das séries que compunham o banco de dados. Esta pesquisa buscou então identificar fatores que pudessem estar influenciando resultados positivos ou negativos para cada um dos dois modelos. A princípio, observamos os resultados de regressões lineares dos erros de cada modelo com variáveis do tipo:

- ✓ número de negociações no dia, um grau de indicação da liquidez da opção;
- ✓ dias úteis para o vencimento;

- ✓ uma variável indicativa do *moneyness* da opção (S/K) e
- ✓ o preço de fechamento da opção.

Tabela 4.6: Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 com Vencimento em 17/02/2003 (Série 18) Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si. Total de 137 Observações.

Testes Estatísticos	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	16,16%	24,19%	-3,68%
Desvio Padrão	0,422307992	0,33788651	0,455332803
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	4,479708224	8,378299076	-0,946785022
p-valor (bi-caudal)	0,00%	0,00%	34,37%
Resultado Teste (5%)	Rejeitar H0	Rejeitar H0	Aceitar H0

As regressões¹⁶ com os erros do Modelo Seno Hiperbólico não apresentaram significância estatística para os coeficientes de nenhuma das variáveis acima. Já a regressão dos erros do Modelo de Black e Scholes apresentou coeficientes estatisticamente significantes para todas as variáveis acima, indicando estatisticamente que liquidez, tempo de maturidade, *moneyness* e preço de fechamento da opção têm influência sobre o desvio de precificação cometido pelo Modelo de Black e Scholes. Entretanto, não foi identificado, dentre tais fatores, um cuja influência pudesse ser compreendida e portanto explicasse por que em algumas séries o modelo apresentava resultados satisfatórios e em outras, resultados insatisfatórios.

4.3 – Análise por Opção.

Tendo em vista os resultados inconclusivos da seção anterior, buscou-se então pesquisar o comportamento de ambos os modelos dentro da existência de cada opção em si. O que ficou bastante claro nesta análise é que, mesmo em séries onde os resultados não haviam sido satisfatórios em relação ao Modelo

Seno Hiperbólico, em todas as séries foi possível encontrar opções cujos resultados mostraram-se muito favoráveis a este modelo. Em outras palavras, os preços dados pelo modelo convergiam para os preços de mercado. Assim, em cada amostra serial, tornava-se provável que deveriam existir resultados realmente muito ruins que estivessem infectando de forma extremamente negativa o resultado da série como um todo. Já em relação ao Modelo de Black e Scholes, a miscelânea de resultados continuou.

A priori, tentou-se identificar um ou mais fatores que pudessem explicar os resultados às vezes positivos, às vezes negativos. Foram pesquisadas características marcantes da opção, tais como:

- ✓ número de dias de negociação em face do número total de dias úteis de existência da opção;
- ✓ preço de fechamento da opção;
- ✓ volatilidade dos parâmetros α e L no Modelo Seno Hiperbólico;
- ✓ volatilidade da volatilidade σ no Modelo de Black e Scholes;
- ✓ época de existência da opção (início, meio ou fim de ano);
- ✓ preço de exercício da opção e
- ✓ volatilidade e patamar da taxa de juros livre de risco r .

Em relação ao Modelo de Black e Scholes, nenhum dos fatores acima abordados mostrou-se com alguma influência sistemática sobre o erro de precificação do modelo relativo ao preço de fechamento de mercado.

Entretanto, em relação ao Modelo Seno Hiperbólico, percebeu-se uma fortíssima influência negativa dos erros de opções com baixos preços de fechamento. Os maiores erros cometidos estavam (quase) sempre associados a opções com fechamento da ordem de centavos, com raríssimas exceções. Inclusive, a média das 913 opções excluídas na seção 4.1 com erros relativos superiores a 100% era R\$ 0,26, com um desvio-padrão de 0,17. E apenas 22 opções dentre as 913 excluídas tinham preço de fechamento acima de R\$

¹⁶ Ver anexos 5 a 8.

1,00, sendo este o fato mais interessante: todas essas 22 opções acima de R\$ 1,00 foram excluídas por erros acima de 100% na precificação pelo Modelo Black e Scholes ou na comparação entre os modelos, o que acarreta dizer que todas excluídas devido a erros acima de 100% no Modelo Seno Hiperbólico fecharam abaixo de R\$ 1,00 (na verdade, o preço máximo de uma opção excluída por erro no Modelo Seno Hiperbólico foi R\$ 0,82).

E, como pode ser percebido nos gráficos 4.1 e 4.2, a influência negativa é tanto maior quanto mais próximo de zero está o preço de fechamento da opção. Além disso, também podemos observar nos gráficos a seguir que o efeito dos baixos preços de fechamento é muito mais pronunciado no Modelo Seno Hiperbólico do que no Modelo de Black e Scholes.

GRÁFICO 4.1: Erros relativos do Modelo Seno Hiperbólico em relação ao Preço de Fechamento da Opção de Compra sobre o ativo TNLP4 em Função do Preço de Fechamento. O Período de Análise Compreende 15/09/2000 a 20/03/2003 e a Amostra Está Excluída dos Erros Superiores em Módulo a 100%. Total de 3.938 Observações.

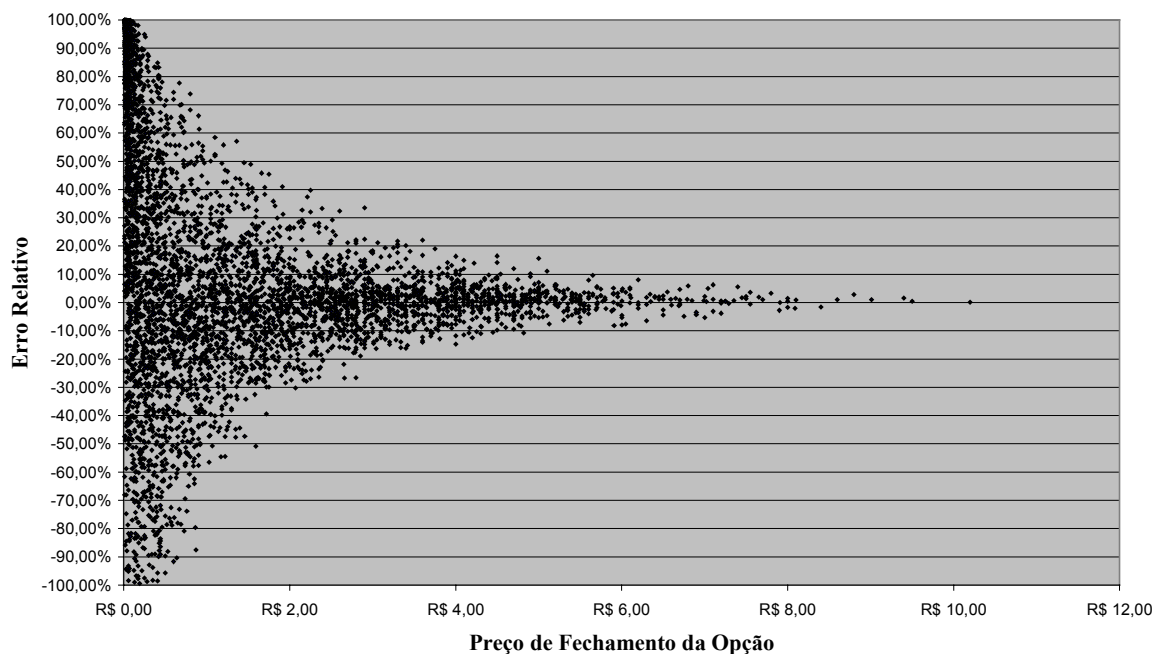
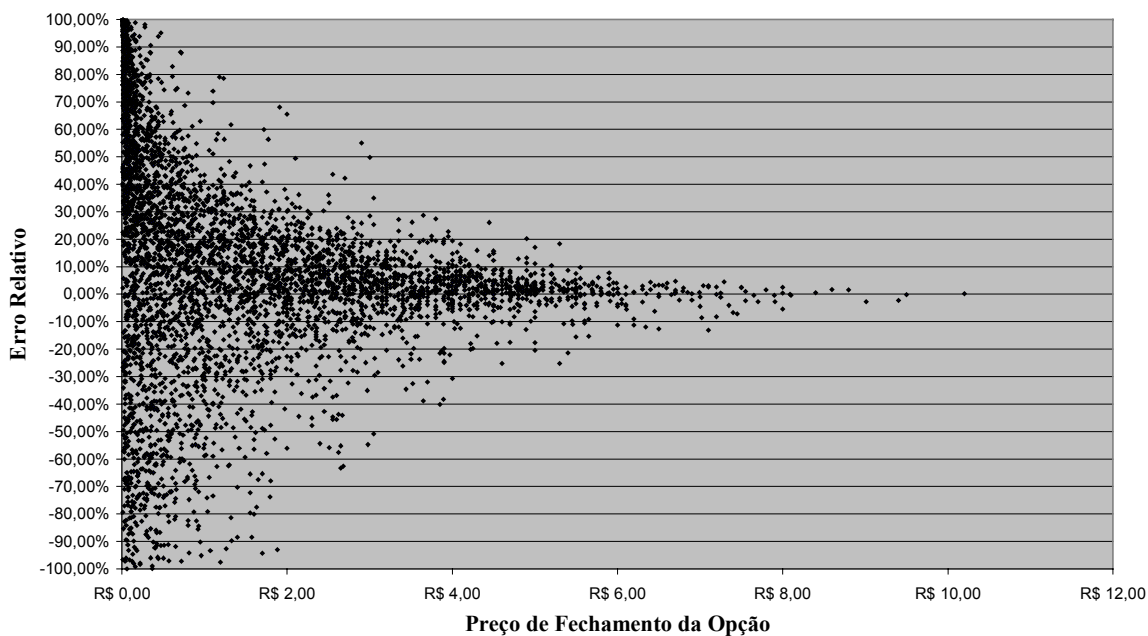


GRÁFICO 4.2: Erros relativos do Modelo de Black e Scholes em relação ao Preço de Fechamento da Opção de Compra sobre o ativo TNLP4 em Função do Preço de Fechamento. O Período de Análise Compreende 15/09/2000 a 20/03/2003 e a Amostra Está Excluída dos Erros Superiores em Módulo a 100%. Total de 3.938 Observações.



Com base nisto, a presente dissertação remodelou a amostra de dados, excluindo agora 1.699 observações nas quais os preços de fechamento eram inferiores a R\$ 1,00. Restaram assim 2.239 observações. A primeira consequência positiva é que todos os erros superiores a 59% (em módulo) na precificação pelo Modelo Seno Hiperbólico foram excluídos naturalmente com a restrição imposta, o que também pode ser observado no gráfico 4.1. Um novo teste estatístico foi realizado e a

aderência do Modelo Seno Hiperbólico melhorou sensivelmente, conforme pode ser evidenciado na tabela 4.7.

Tabela 4.7: Aderência dos Preços de Opções de Compra sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 15/09/2000 até 20/03/2003. Foram Excluídas as Observações com Preços de Fechamento abaixo de R\$ 1,00. Total de 2.239 Observações.

Testes Estatísticos	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	0,13%	1,32%	-4,55%
Desvio Padrão	0,132616862	0,184143517	0,226588526
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	0,44852443	3,399768893	-9,49790866
p-valor (bi-caudal)	65,38%	0,07%	0,00%
Resultado Teste (5%)	Aceitar H0	Rejeitar H0	Rejeitar H0

Os resultados atestam que as observações com baixos preços de fechamento estavam infectando demasiadamente a amostra de dados e que, para opções com preços de fechamento acima de R\$ 1,00, o Modelo Seno Hiperbólico leva a resultados estatisticamente satisfatórios. Assim, para confirmar mais uma vez tais resultados, buscamos, em cada série, opções que mantiveram preços de fechamento sempre perto da casa de alguns reais e a aderência do Modelo Seno Hiperbólico foi sempre estatisticamente satisfatória nestas condições, enquanto que o Modelo de Black e Scholes continuava com resultados oscilando entre o satisfatório e o insatisfatório sem nenhuma explicação aparente encontrada por esta pesquisa.

Para ilustrar o comentário do parágrafo anterior, a tabela 4.8 mostra os resultados estatísticos de aderência dos modelos para a opção TNLPF34, com vencimento no dia 18 de junho de 2001

(série 6). Tal opção teve negociação em 30 dos 43 dias úteis de existência, estando sempre cotada acima dos R\$ 2,00¹⁷.

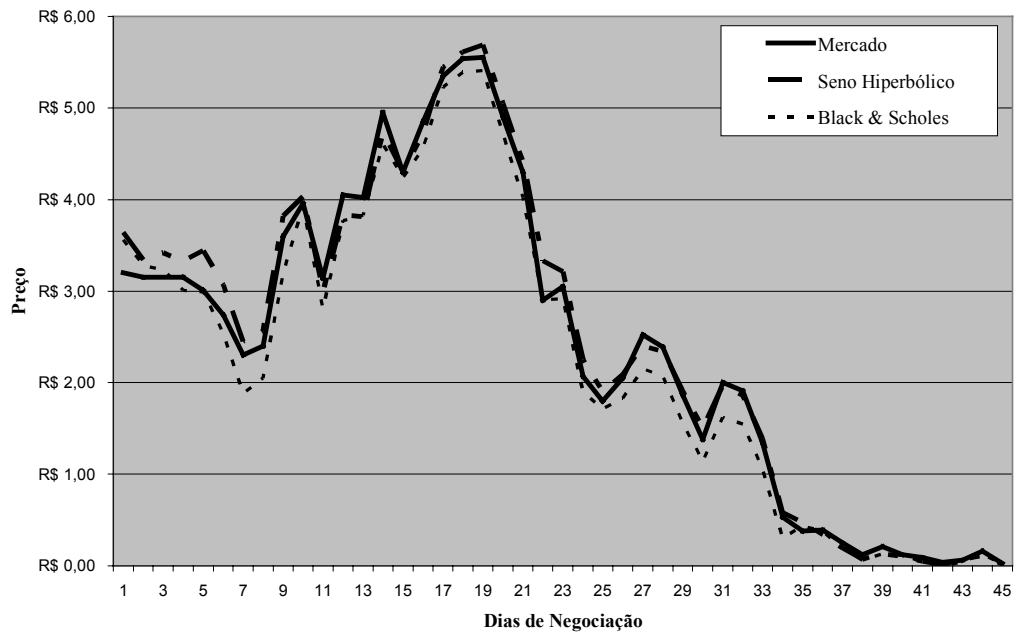
Tabela 4.8: Aderência dos Preços da Opção de Compra TNLPF34 sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 16/04/2001 até 13/06/2001. Total de 30 Observações.

Opção TNLPF34	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	2,60%	-8,93%	9,09%
Desvio Padrão	0,105156905	0,117517516	0,159940281
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	1,352597293	-4,162303575	3,111311101
p-valor (bi-caudal)	17,62%	0,00%	0,19%
Resultado Teste (5%)	Aceitar H0	Rejeitar H0	Rejeitar H0

Mesmo algumas opções que terminaram fora do dinheiro mas que estiveram constantemente cotadas acima de R\$ 1,00 foram precificadas pelo Modelo Seno Hiperbólico de maneira estatisticamente satisfatória, como pode ser evidenciado no gráfico 4.3. Ele representa a evolução da opção TNLPB34, com vencimento em 18 de fevereiro de 2002 (série 10), tendo sido negociada em 45 dos 46 dias úteis de existência.

GRÁFICO 4.3: Evolução do Preço de Mercado e dos Preços dados pelos Modelos Seno Hiperbólico e Black e Scholes da Opção de compra TNLPB34, sobre o Ativo TNLP4, com vencimento em 18 de Fevereiro de 2002.

¹⁷ Ver anexo 9.

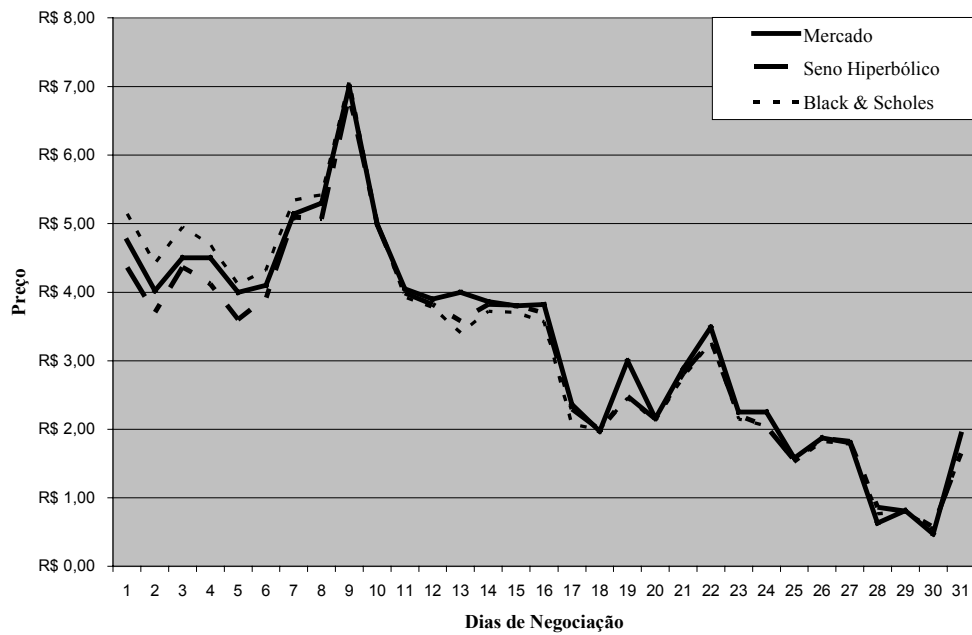


Com a opção TNL PJ20, com vencimento em 21 de outubro de 2002 (série 14), as três hipóteses nulas não puderam ser descartadas e o gráfico de evolução do mercado chega a se confundir com os gráficos dos dois modelos em alguns períodos da evolução da opção. Esta opção teve 31 dias de negociações sob um total de 48 dias úteis de existência.

Tabela 4.9: Aderência dos Preços da Opção de Compra TNLPJ20 sobre o Ativo TNLP4 Calculados pelas Metodologias do Seno Hiperbólico e de Black e Scholes em Relação aos Preços de Fechamento do Mercado e Aderência dos Dois Modelos entre si Durante o Período de 14/08/2001 até 17/10/2001. Total de 31 Observações.

Opção TNLPJ20	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes	Comparação entre Modelos
Erro Relativo Médio	2,20%	0,92%	1,10%
Desvio Padrão	0,096093832	0,086688922	0,06882536
Hipótese Nula	Erro rel. = 0 ?	Erro rel. = 0 ?	Modelos iguais?
Teste T	1,273660627	0,588537366	0,888820767
p-valor (bi-caudal)	20,28%	55,62%	37,41%
Resultado Teste (5%)	Aceitar H0	Aceitar H0	Aceitar H0

GRÁFICO 4.4: Evolução do Preço de Mercado e dos Preços dados pelos Modelos Seno Hiperbólico e Black e Scholes da Opção de compra TNLPJ20, sobre o Ativo TNLP4, com vencimento em 21 de Outubro de 2002.



5. CONCLUSÃO

O presente trabalho examinou o Modelo Seno Hiperbólico para precificação de opções de compra do tipo europeu, analisando os resultados comparativamente aos fornecidos pelo Modelo de Black e Scholes, este último amplamente conhecido e utilizado no mercado brasileiro. A idéia central inicial desta pesquisa consistia na investigação de algum outro modelo de precificação de opções com aderência ao mercado possivelmente superiora à fórmula de Black e Scholes, já que este constitui uma espécie de *benchmark* no mercado financeiro mundial.

Escolheu-se o Modelo Seno Hiperbólico pela sua relativa simplicidade no que diz respeito à fórmula fechada final de precificação e pela facilidade de manuseio das variáveis de entrada desta equação, características comuns também ao Modelo de Black e Scholes. A estimativa dos dois parâmetros do modelo, que aparentemente não representam variáveis econômicas ou de mercado, foi um desafio à parte ao longo desta pesquisa.

As opções de compra tinham a ação da Telemar TNLP4 (tipo PN) como ativo-objeto e o período da amostra compreendia desde 28 de julho de 2000 até 20 de março de 2003. Trabalhou-se sempre com os preços de fechamento, tanto da ação quanto da opção, o que pode ter causado erros de assincronismo de informações, visto que a última negociação da opção dificilmente coincide com a última negociação da ação. O erro de assincronismo ocorre porque, no momento da última negociação da opção (que ditará o preço de fechamento da mesma), o preço da ação pode não coincidir com o seu futuro preço de fechamento e ambos modelos, ao precificar a opção, utiliza como entrada da equação o preço da ação naquele instante. Como este erro influencia ambos os modelos estudados nesta pesquisa e porque ele seria de difícil ajuste, a assincronia das informações foi ignorada por esta dissertação.

Para se testar o Modelo Seno Hiperbólico, comparando-o com o Modelo de Black e Scholes, trabalhou-se com a amostra integral, com a amostra ajustada, com as diferentes séries de opções, ou seja, opções com o mesmo vencimento e, finalmente, com dados da mesma opção ao longo de sua existência. Os testes estatísticos tinham três hipóteses que estavam sendo testadas:

- I. a média do erro cometido pelo Modelo Seno Hiperbólico na precificação da opção, relativamente ao preço de mercado, seria zero? Em outras palavras, o preço fornecido pelo modelo seria uma estimativa não-viesada do preço de mercado da opção?
- II. idem a acima, porém testando agora o Modelo de Black e Scholes;
- III. A média do erro cometido por um modelo em relação ao outro seria zero? Em outras palavras, os modelos forneciam resultados semelhantes, sejam eles bons ou ruins?

Os resultados em geral atestam que os dois modelos precificam as opções de maneiras diferentes e na maioria dos testes, pôde-se rejeitar, sob um nível de 5% de significância estatística, a hipótese de que os modelos geravam os mesmos resultados.

Em relação ao Modelo de Black e Scholes, esta pesquisa, como um todo, não pode, de forma alguma, afirmar categoricamente que ele forneça preços compatíveis com o mercado. Sem entrar no mérito das hipóteses do modelo, tal como a hipótese de mercado eficiente e sem atritos, visto que tais hipóteses são extremamente discutíveis (principalmente em se tratando de mercado brasileiro), os resultados apresentados pelo Modelo de Black e Scholes foram bastante inconclusivos, visto que às vezes eram satisfatórios, às vezes não o eram. E a tentativa de se procurar por fatores que pudessem estar influenciando esta variância de resultados do modelo foi frustrada. A pergunta então que ainda permanece em voga é: será que o Modelo de Black e Scholes é amplamente utilizado no mercado porque foi o primeiro, porque é bastante simples e porque, em princípio, nenhum outro modelo foi dado como comprovadamente superior a ele?

O Modelo Seno Hiperbólico, testado por esta pesquisa, mostrou-se eficiente na precificação de opções, desde que estas estivessem com preço de mercado não muito baixo. O ponto de corte neste trabalho foi R\$ 1,00, escolhido aleatoriamente. Os resultados na amostra de opções com preços de mercado acima de R\$ 1,00 foram bastante satisfatórios. A aderência do Modelo Seno Hiperbólico, dentro dos limites dos testes estatísticos realizados por esta dissertação, foi consideravelmente relevante. Sobre os resultados do

modelo nos testes com opções de baixo preço (abaixo de R\$ 1,00), estes foram inconclusivos. O fator atenuante a este fato é a maneira como se procederam os testes. Eles foram baseados em erros relativos ao preço de mercado, ou seja, a diferença entre o preço de mercado e o preço dado pelo modelo dividida pelo preço de mercado.

Dessa maneira, os erros percentuais tendem a ser tanto maiores quanto menor for o preço de fechamento da opção. Por exemplo, para uma opção extremamente fora do dinheiro, é muito provável que o seu preço de mercado (na verdade, o preço do lote) seja R\$ 0,01. Isto porque abaixo de um centavo (nossa menor unidade monetária), a opção estaria “de graça”. Qualquer erro de 1 centavo gera um erro relativo de 100%! Mesmo porque esta opção, estando totalmente fora do dinheiro, não deve estar sendo negociada, assim o seu preço de fechamento provavelmente é um preço de um negócio feito em outro momento, com outras condições de mercado (entenda-se aqui principalmente outro preço da ação). Para ficar mais claro, suponhamos que o preço correto da opção (se é que podemos assim dizer) seja R\$ 0,001. Mas a opção está com um preço defasado do último negócio de R\$ 0,01 e o modelo, fazendo a precificação da maneira correta, teria um erro relativo de $(0,01 - 0,001)/0,01$, ou seja, um erro relativo de 90%, ao passo que, em teoria, seu erro deveria ser 0%. Este ponto certamente tem influência no fato dos resultados do Modelo Seno Hiperbólico terem sido inconclusivos na amostra completa, com as opções fora do dinheiro.

Fica, entretanto, a sugestão para uma pesquisa futura mais completa a respeito dos motivos que poderiam explicar essa marcante diferença de eficiência do Modelo Seno Hiperbólico com relação ao preço da opção ser baixo ou alto. Teria o referido modelo realmente este problema na precificação de opções fora do dinheiro, com baixos preços de mercado? No caso de resposta afirmativa, existiria realmente algum ponto de corte para esta diferença? Existiria alguma outra medida de erro que evitasse tal problema?

E além deste fato aqui realçado, um outro ponto futuro de pesquisa seria a respeito da estimativa dos parâmetros do modelo: existiria algum método comprovadamente melhor que o utilizado por esta dissertação? O caminho de pesquisas do Modelo Seno Hiperbólico está mais do que nunca em aberto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADAMS, K.; DEVENTER, D. V. Fitting yield curves and forward rate curves with maximum smoothness. **Journal of Fixed Income**, v. 4, n. 1, p. 52-62, June 1994.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. **The pricing of options and corporate liabilities**. **Journal of Political Economy**, v. 81, p. 81, 637-659, 1973.
- CARR, P. **Financial interpretations of probabilistic concepts**. Midwest Probability Conference, 1998. Disponível em: <http://www.math.nyu.edu/research/carrp/papers>. Acesso em: 2003.
- _____. **A survey of valuation models with jumps, stochastic volatility, and correlation**. New York, USA: Math Week, 2000.
- _____. **FAQ's (Frequently Asked Questions) in option pricing theory**. Julho de 2002. Disponível em: <http://www.math.nyu.edu/research/carrp/papers>. Acesso em 2003.
- _____. *et al.* M. The fine structure of asset returns: an empirical investigation. **Journal of Business**, v. 75, n.2, p.305-332, 2002.
- _____. *et al.* **Stochastic volatility for Lévy processes**. 2003. Disponível em: <http://www.math.nyu.edu/research/carrp/papers>. Acesso em: 2003.
- _____.; MADAN, D.B. Option valuation using the fast fourier transform. **Journal of Computational Finance**, v. 2, n. , p. 61-73, 1998.
- _____.; TARI, M.; ZARIPHOPOLU, T. **Closed form option pricing with Smiles**. Banc of America Securities, 1999. (Working paper).
- _____.; WU, L. **The finite moment logstable process and option pricing**. Banc of America Securities, 2000. (Working paper).
- COX, J.C.; ROSS, S.A. The valuation of options for alternative estochastic processes. **Journal of Financial Economics**, v. 3, p. 145-66, 1976.
- CUNHA JR., D.; LEMGRUBER, E. F. **Opções de dólar no brasil com taxas de juro e de cupom estocásticos**. Disponível em: <http://www.risktech.com.br>. Acesso: nov. 2002.
- DA SILVA, A. L. C.; LEMGRUBER, E. F. Value at risk baseado em distribuições alfa-estáveis: uma análise empírica dos mercados latino-americanos. In: Encontro Anual da ANPAD, 25., 2001, Campinas. **Anais Eletrônicos...** Campinas: ANPAD, 2001. 1 CD.
- FREUND, J.E.; SIMON, G.A. **Estatística aplicada: economia, administração e contabilidade**. Local: São Paulo, Prentice Hall, 1997.
- GROSSMAN, S. I. **Calculus**. New York: Academic Press, 1977.

- HULL, J. C. **Options, futures and other derivatives**. 4^a ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- LÉVY, P. Théorie des erreurs la loi de Gauss et les lois exceptionnelles. **Bulletin de la Société de France**, v. 52, p. 49-85, 1924.
- LEWIS, A.L. **Option valuation under stochastic volatility**. California, USA: Finance Press, 2000.
- LUKACS, E. **Characteristic functions**. Londres: Charles Griffin, 1924.
- MADAN, D.B.; BAKSHI, G. **Spanning and derivative security valuation**. 1999.
Disponível em: http://papers.ssrn.com/sol3/cf_dev/AbsByAuth.cfm?per_id=16650. Acesso em: 2003.
- _____; Carr, P.; Chang, E. The variance gamma process and option pricing. **European Finance Review**, v. 2, n. 1, p. 79-105, 1998.
- MADAN, D.B.; SENETA, E. The variance gamma (VG) model for share market returns. **Journal of Business**, v. 63, n. 4, p. 511-24, 1990.
- MANTEGNA, R.N.; STANLEY, H.E. **An introduction to econophysics correlations and complexity in finance**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- MERTON, R.C. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science** v. 4, n. 1, p. 141-83, 1973.
- _____. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. **Journal of Financial Economics**, v. 3, Março, p. 125-144, 1976.
- NOLAN, J. P. **Stable distributions: models for heavy tailed data**. Disponível em: <http://www.cas.american.edu/~jpnolan>. Acesso em: 2002.
- _____. **Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions**. Disponível em: <http://www.cas.american.edu/~jpnolan>. Acesso em: 2002.
- _____; FOFACK, H. **Tail behavior, modes and other characteristics of stable distributions**. 2002.
Disponível em: <http://www.cas.american.edu/~jpnolan>.
- RUBINSTEIN, M. Implied binomial tree. **Journal of Finance**, v. 49, n. 3, p. 771-818, 1994.
- SHEA, G. Interest rate term structure estimation with exponential splines: a note. **Journal of Finance**, v. 40, n. p. 319-25, 1985.

THANH, L.N. **Analytical approach to value options with state variables of a Lévy system**. Department of Management and Finance, Warsaw School of Economics – August/2002. Disponível em: [http:// www.ssrn.com](http://www.ssrn.com). Acesso em: 2003.

VARGA, G. Interpolação por cubic spline para a estrutura a termo brasileira. **Resenha da BM&F**, n. 140, Março, 2000.

WHALEY, R.E. Valuation of call options on dividend-paying stocks. **Journal of Financial Economics**, v. 10, n. , p. 29-58, 1982.

ANEXOS

ANEXO 1

Definição da Função $\Psi(a, b, y)$, Referente ao Modelo Gama de Variância.

$$\begin{aligned} \Psi(a, b, y) = & c^{y+1/2} \exp(\text{sign}(a)*c)*(1+u)^y * K_{y+1/2}(c) * \Phi(y, 1-y, 1+y, \\ & (1+u)/2, -\text{sign}(a)c(1+u))/ \text{raiz}(2\pi)*y*\Gamma(y) \\ - \text{sign}(a)* & c^{y+1/2} \exp(\text{sign}(a)*c)*(1+u)^{1+y} * K_{y-1/2}(c) * \Phi(1+y, 1-y, 2+y, \\ & (1+u)/2, -\text{sign}(a)c(1+u))/ \text{raiz}(2\pi)*(1+y)*\Gamma(y) \\ + \text{sign}(a)* & c^{y+1/2} \exp(\text{sign}(a)*c)*(1+u)^y * K_{y-1/2}(c) * \Phi(y, 1-y, 1+y, \\ & (1+u)/2, -\text{sign}(a)c(1+u))/ \text{raiz}(2\pi)*y*\Gamma(y), \end{aligned}$$

onde: $c = \text{mod}(a)*\text{raiz}(2 + b^2),$

$$u = b/\text{raiz}(2 + b^2),$$

$$\text{sign}(a) = 1, \text{ se } a > 0; -1, \text{ se } a < 0 \text{ e } 0, \text{ se } a = 0,$$

$$\text{mod}(a) = a, \text{ se } a \geq 0 \text{ ou } -a, \text{ se } a < 0,$$

K_x representa a função de Bessel modificada do segundo tipo de ordem x ,

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x, z) = \Gamma(\gamma) / (\Gamma(\alpha)*\Gamma(\gamma - \alpha)) *$$

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{(\gamma-\alpha-1)}(1-ux)^{-\beta} \exp(uz) du,$$

e finalmente: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{(\alpha-1)} * \exp(-x) dx.$

ANEXO 2

Lista de Feriados no Brasil Durante o Período de 4 de Janeiro de 1999 a 6 de Maio de 2003.

15/02/1999	01/05/2001
16/02/1999	14/06/2001
01/04/1999	07/09/2001
02/04/1999	12/10/2001
21/04/1999	02/11/2001
03/06/1999	15/11/2001
07/09/1999	25/12/2001
12/10/1999	01/01/2002
02/11/1999	11/02/2002
15/11/1999	12/02/2002
01/01/2000	29/03/2002
06/03/2000	21/04/2002
07/03/2000	01/05/2002
21/04/2000	30/05/2002
01/05/2000	07/09/2002
22/06/2000	12/10/2002
07/09/2000	02/11/2002
12/10/2000	15/11/2002
02/11/2000	25/12/2002
15/11/2000	01/01/2003
25/12/2000	03/03/2003
01/01/2001	04/03/2003
26/02/2001	18/04/2003
27/02/2001	21/04/2003
13/04/2001	01/05/2003
21/04/2001	

ANEXO 3

Séries de Opções Utilizadas por Esta Pesquisa, de Acordo com o Respetivo Vencimento.

Série	Vencimento
1	21/8/2000
2	16/10/2000
3	18/12/2000
4	19/2/2001
5	16/4/2001
6	18/6/2001
7	20/8/2001
8	15/10/2001
9	17/12/2001
10	18/2/2002
11	15/4/2002
12	17/6/2002
13	19/8/2002
14	21/10/2002
15	18/11/2002
16	16/12/2002
17	20/1/2003
18	17/2/2003
19	17/3/2003
20	22/4/2003
21	19/5/2003

ANEXO 4

Regressão Linear entre os Preços dados pelo Modelo Seno Hiperbólico e o Preço de Fechamento da Opção no Mercado.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,991425307
R-Quadrado	0,98292414
R-quadrado ajustado	0,982919801
Erro padrão	0,220581672
Observações	3938

ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	11023,80042	11023,80042	226564,83	0
Resíduo	3936	191,5110941	0,048656274		
Total	3937	11215,31152			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	0,029125622	0,005137594	5,669117532	0,00%
Variável Preço de Fechamento	0,988479341	0,002076688	475,9882666	0,00%

Regressão Linear entre os Preços dados pelo Modelo de Black e Scholes e o Preço de Fechamento da Opção no Mercado.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,98353145
R-Quadrado	0,967334112
R-quadrado ajustado	0,967325813
Erro padrão	0,305088162
Observações	3938

ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	10848,95341	10848,95341	116556,6697	0
Resíduo	3936	366,3581049	0,093078787		
Total	3937	11215,31152			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	0,059415148	0,007071548	8,402000431	0,00%
Variável Preço de Fechamento	0,976721502	0,002860897	341,4039685	0,00%

ANEXO 5

Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo Seno Hiperbólico e o Número de Negociações da Opção no Dia.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>					
R múltiplo		0,021733624			
R-Quadrado		0,00047235			
R-quadrado ajustado		0,00026622			
Erro padrão		6,23906598			
Observações		4851			

ANOVA					
	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	89,1991717	89,1991717	2,291509514	0,130148528
Resíduo	4849	188751,9039	38,9259443		
Total	4850	188841,1031			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	0,058893004	0,112006018	0,525802138	59,90%
Número de Negociações no Dia	9,43612E-05	6,23351E-05	1,51377327	13,01%

Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo de Black e Scholes e o Número de Negociações da Opção no Dia.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>					
R múltiplo		0,054266677			
R-Quadrado		0,002944872			
R-quadrado ajustado		0,002739251			
Erro padrão		0,691023579			
Observações		4851			

ANOVA					
	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	6,838883542	6,838883542	14,3218617	0,000155925
Resíduo	4849	2315,46338	0,477513586		
Total	4850	2322,302263			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	0,004925764	0,012405511	0,39706256	69,13%
Número de Negociações no Dia	-2,6128E-05	6,90408E-06	-3,784423562	0,02%

ANEXO 6

Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo Seno Hiperbólico e o Número de Dias Úteis da Opção para o Vencimento.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,024581134
R-Quadrado	0,000604232
R-quadrado ajustado	0,000398129
Erro padrão	6,238654362
Observações	4851

ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	114,1038667	114,1038667	2,931693144	0,086920296
Resíduo	4849	188726,9992	38,92080825		
Total	4850	188841,1031			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	0,439671711	0,18594028	2,364585609	1,81%
Dias Úteis para o Vencimento	-0,011383945	0,006648651	-1,712218778	8,69%

Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo de Black e Scholes e o Número de Dias Úteis da Opção para o Vencimento.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,20189803
R-Quadrado	0,040762815
R-quadrado ajustado	0,040564993
Erro padrão	0,677791758
Observações	4851

ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	94,6635764	94,6635764	206,0584083	8,54043E-46
Resíduo	4849	2227,638687	0,459401668		
Total	4850	2322,302263			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	0,230861466	0,020201278	11,42806257	0,00%
Dias Úteis para o Vencimento	-0,010368933	0,000722335	-14,3547347	0,00%

ANEXO 7

Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo Seno Hiperbólico e a variável *Moneyness* (S/K) da Opção.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,008617444
R-Quadrado	7,42603E-05
R-quadrado ajustado	-0,000131952
Erro padrão	6,240308298
Observações	4851

ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	14,02340472	14,02340472	0,360115136	0,548470341
Resíduo	4849	188827,0797	38,94144766		
Total	4850	188841,1031			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	-0,250606422	0,691194462	-0,362570066	71,69%
Moneyness	0,381059073	0,63499692	0,600095939	54,85%

Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo de Black e Scholes e a variável *Moneyness* (S/K) da Opção.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,095130791
R-Quadrado	0,009049867
R-quadrado ajustado	0,008845506
Erro padrão	0,688904752
Observações	4851

ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	21,01652764	21,01652764	44,28356764	3,15541E-11
Resíduo	4849	2301,285735	0,474589758		
Total	4850	2322,302263			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	0,480237285	0,076305068	6,293648598	0,00%
Moneyness	-0,466493992	0,070101087	-6,654589968	0,00%

ANEXO 8

Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo Seno Hiperbólico e o Preço de Fechamento da Opção.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,005966835
R-Quadrado	3,56031E-05
R-quadrado ajustado	-0,000170618
Erro padrão	6,240428922
Observações	4851

ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	6,723331569	6,723331569	0,172645653	0,677789542
Resíduo	4849	188834,3798	38,94295314		
Total	4850	188841,1031			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	0,195151334	0,122113559	1,598113558	11,01%
Preço de Fechamento	-0,022668516	0,054556345	-0,415506502	67,78%

Regressão Linear entre os Erros Relativos de Precificação do Modelo de Black e Scholes e o Preço de Fechamento da Opção.

RESUMO DOS RESULTADOS

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,028879646
R-Quadrado	0,000834034
R-quadrado ajustado	0,000627978
Erro padrão	0,691754665
Observações	4851

ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>
Regressão	1	1,936878989	1,936878989	4,047606588	0,044289221
Resíduo	4849	2320,365384	0,478524517		
Total	4850	2322,302263			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	-0,041761053	0,013536349	-3,085104622	0,20%
Preço de Fechamento	0,01216696	0,006047598	2,011866444	4,43%

ANEXO 9

Preços da Opção de Compra TNLPF34 sobre o Ativo TNL4 Calculados pelas Metodologias do Seno

Hiperbólico e de Black e Scholes, além do Preço de Fechamento no Mercado.

Data	Fechamento	Modelo Seno Hiperbólico	Modelo Black & Scholes
16/4/2001	R\$ 3,85	R\$ 3,95	R\$ 4,68
17/4/2001	R\$ 3,45	R\$ 3,26	R\$ 4,06
18/4/2001	R\$ 5,00	R\$ 4,73	R\$ 5,32
19/4/2001	R\$ 3,50	R\$ 3,29	R\$ 4,26
20/4/2001	R\$ 2,39	R\$ 1,59	R\$ 2,80
23/4/2001	R\$ 2,60	R\$ 1,76	R\$ 3,56
24/4/2001	R\$ 3,06	R\$ 2,41	R\$ 3,96
25/4/2001	R\$ 3,90	R\$ 3,35	R\$ 4,74
26/4/2001	R\$ 5,00	R\$ 4,83	R\$ 6,02
27/4/2001	R\$ 5,40	R\$ 5,33	R\$ 6,55
30/4/2001	R\$ 5,30	R\$ 5,63	R\$ 6,63
2/5/2001	R\$ 5,50	R\$ 5,53	R\$ 6,35
3/5/2001	R\$ 6,20	R\$ 6,33	R\$ 6,90
4/5/2001	R\$ 6,45	R\$ 6,37	R\$ 6,85
7/5/2001	R\$ 5,45	R\$ 5,59	R\$ 5,98
8/5/2001	R\$ 5,45	R\$ 5,36	R\$ 5,69
9/5/2001	R\$ 5,45	R\$ 5,29	R\$ 5,50
22/5/2001	R\$ 5,50	R\$ 5,63	R\$ 5,37
24/5/2001	R\$ 4,31	R\$ 4,68	R\$ 4,34
25/5/2001	R\$ 3,60	R\$ 4,10	R\$ 3,73
28/5/2001	R\$ 3,60	R\$ 3,82	R\$ 3,43
30/5/2001	R\$ 3,95	R\$ 4,12	R\$ 3,81
31/5/2001	R\$ 3,90	R\$ 4,21	R\$ 3,93
4/6/2001	R\$ 4,49	R\$ 4,53	R\$ 4,35
5/6/2001	R\$ 5,45	R\$ 5,42	R\$ 5,34
6/6/2001	R\$ 5,70	R\$ 5,74	R\$ 5,69
7/6/2001	R\$ 5,65	R\$ 5,51	R\$ 5,47
11/6/2001	R\$ 5,00	R\$ 5,01	R\$ 5,00
12/6/2001	R\$ 4,85	R\$ 4,82	R\$ 4,82
13/6/2001	R\$ 4,72	R\$ 4,51	R\$ 4,51